MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

RÉGION ACADÉMIQUE GUADELOUPE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Amériques-Antilles-Guyane

Mercredi 9 mars de 8 h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices académiques.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices nationaux, débute après cette pause.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Chaque partie de l'épreuve contient trois exercices. Pour chacune des parties :

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

Chaque équipe rend une seule copie

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10h00.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur. **Les énoncés doivent être rendus avec les copies**

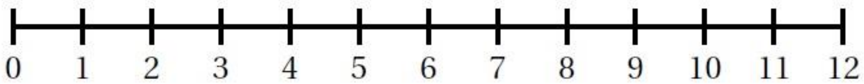
Exercice académique n° 1 : Règles de Golomb (À traiter par tous les candidats)

Toutes les réponses doivent être justifiées

Partie 1

Dans ce problème, on étudie des règles graduées dont la première graduation est zéro. L'unité de longueur utilisée sera le centimètre. On appellera longueur d'une telle règle la graduation la plus grande qui y apparaît.

Par exemple, la règle graduée représentée ci-dessous comporte 13 graduations $(0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;12)$ et sa longueur est 12.



Pour mesurer 1 cm avec cette règle, on peut utiliser les graduations 0 et 1, mais aussi les graduations 1 et 2, ou encore les graduations 2 et 3, …, ou bien encore les graduations 7 et 8.

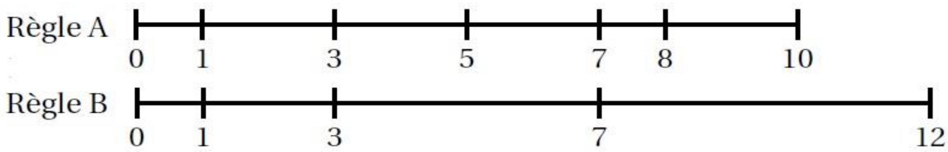
1. En utilisant la règle graduée représentée ci-dessus:

a. Combien y a-t-il de manières différentes de mesurer 1 cm ?

b. Combien y a-t-il de manières différentes de mesurer 2 cm ?

c. Combien y a-t-il de manières différentes de mesurer n cm, n étant un nombre entier naturel compris entre 1 et 12?

A force d'utiliser leur règle, il arrive fréquemment aux élèves que certaines graduations s'en trouvent effacées, comme par exemple sur celles-ci :



2. Avec la règle A comportant 7 graduations et de longueur 10, on trouve 2 manières différentes de mesurer 1 cm (en utilisant (0 ; 1) et (7 ; 8)), mais une seule manière de mesurer 6 cm (en utilisant (1 ; 7)).

a. Avec la règle A : Est-il possible de mesurer toutes les distances entières de 1 à 10?
Chaque distance entière mesurable l'est-elle de manière unique ? (*On pourra utiliser un tableau*).

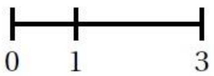
b. Avec la règle B : est-il possible de mesurer toutes les distances entières de 1 à 12 ?
Chaque distance entière mesurable l'est-elle de manière unique ?

3. On appelle **règle parfaite** de longueur L une règle permettant de mesurer **toutes** les distances entières de 1 à L d'une **unique** façon.
On appelle **règle de Golomb** de longueur L une règle pour laquelle chaque distance entière en cm mesurable par cette règle, l'est de manière **unique**.

a. La règle A est-elle une règle de Golomb ? Est-elle une règle parfaite ?
b. Mêmes questions pour la règle B.

4. Représenter toutes les règles de longueur 2, puis, justifier qu'aucune d'elle n'est parfaite.

5. Montrer que la règle de longueur 3 représentée ci-contre est parfaite.
Existe-t-il d'autres règles parfaites de longueur 3 ?



6. Prouver qu'il n'existe pas de règle parfaite de longueur 4.
7. Proposer une règle parfaite de longueur 6.

Partie 2

Dans cette partie, soient m et L deux entiers naturels non nuls, une règle graduée de longueur L et comportant m graduations $a_1 = 0$; a_2 ; a_3 ; ... ; a_{m-1} ; $a_m = L$ sera notée $[a_1 = 0\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ; \dots ;\ a_{m-1}\ ; a_m = L\ ]$

On rappelle l'identité suivante :

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\ , \qquad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

1. Soit une règle $[a_1 = 0\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ \ a_4\ ;\ \ a_5]$ possédant 5 graduations. Prouver qu'il existe 10 manières différentes de mesurer des distances entières avec cette règle.
2. Soit une règle possédant m graduations. Montrer qu'il existe $\frac{m(m-1)}{2}$ mesures possibles avec cette règle.
3. Justifier, en utilisant la question précédente, que la longueur d'une règle parfaite possédant m graduations est nécessairement égale à $\frac{m(m-1)}{2}$.

Nous allons prouver qu'il n'existe pas de règle parfaite hormis celles rencontrées dans la Partie 1.

4. Montrer qu'il n'existe pas de règle parfaite de longueur 5.
On admet le résultat suivant :

S'il existe une règle parfaite ayant m graduations et de longueur $L \geq 7$, alors $L \geq 10$ et $m \geq 5$.

5. On considère une règle graduée $[a_1 = 0\ ; a_2\ ; a_3\ ; \dots ; a_{m-1}\ ;\ a_m = L\ ]$ comportant m graduations et de longueur L, tels que $m \geq 5$ et $L \geq 10$.

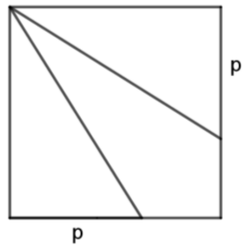
- **a.** On suppose que cette règle est parfaite. Prouver que : si $a_2 = 1$, alors $a_{m-1} \neq L - 1$.
- **b.** On suppose que la règle est parfaite et que $a_2 = 1$. Prouver que $a_3 = 4$ et $a_{m-1} = L - 2$.
- **c.** Montrer que la règle $[0\ ; 1\ ; 4\ ; \dots ; a_{m-2}\ ; L-2\ ;\ L\ ]$ n'est pas une règle parfaite.

6. Conclure.

Exercice académique n°2 : Léonard le talentueux

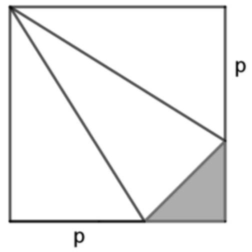
(*À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiq*ues)

Partie 1



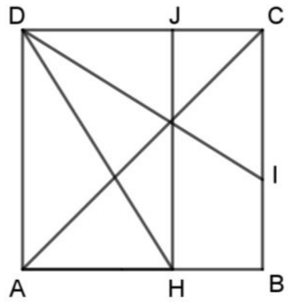
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 cm en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à p pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone grisée. Il veut alors que les trois parties triangulaires du carré tronqué aient la même aire.

Justifier qu'une seule valeur de p lui permet d'arriver à ses fins et que cette valeur vérifie la relation : $p^2 + p - 1 = 0$.



3. Enfin Léonard est mathématicien. Ayant réalisé approximativement (ci-dessous) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes. Qu'en est-il ?

(*On pourra noter* K *le point d'intersection de* (AC) *et de* (JH), *et utiliser le repère orthonormé* $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.)

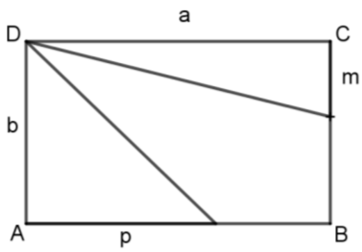
Partie 2 : Du carré de côté 1 au rectangle de côtés a et b.

Léonard le mathématicien esthète affirme que les résultats des trois questions précédentes se généralisent en remplaçant le carré par un rectangle.

Dans cette partie, on note α le nombre réel positif vérifiant $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

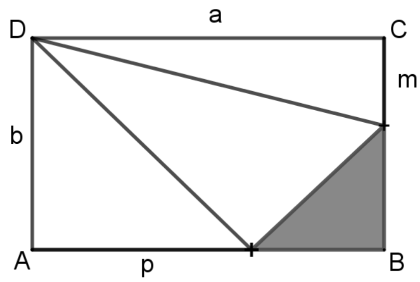
1. **Première affirmation : « Le rectangle ci-dessous peut être partagé en trois parties de même aire, selon le schéma indiqué ».**

   Léonard a-t-il raison ? Si oui, exprimer p et m en fonction de a et b.



2. **Deuxième affirmation : « En supprimant la zone hachurée, le rectangle tronqué peut être partagé en trois parties triangulaires de même aire, selon le schéma indiqué ».**

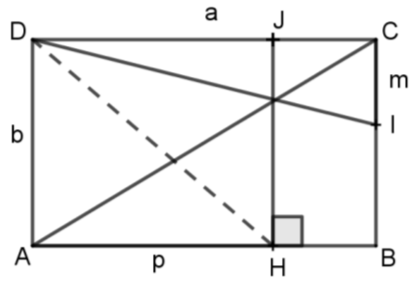
   Léonard a-t-il raison ? Si oui, exprimer p et m en fonction de a et b.



3. **Troisième affirmation : « En supposant la figure précédente réalisée, les trois droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes ».**

   Léonard a-t-il raison ?

   (*On pourra noter* K *le point d'intersection de* (AC) *et de* (JH), *et utiliser un repère judicieusement choisi*).



Exercice académique n°3 : Un tour de magie

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année. Par exemple, pour une personne née le 18 juin, le numéro du jour de naissance est 18 et le numéro du mois de naissance est 6.

Partie A :

Lors d'un spectacle, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul **Alpha** suivant « Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul **Alpha** donne effectivement le nombre 308.

2. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et A le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul **Alpha** .

   a. Exprimer A en fonction de j et de m et démontrer que $A - m$ est un multiple de 12.

   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul **Alpha** .

Partie B :

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre B défini par $B = 12j + 31m$ (programme de calcul **Beta**. On étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :

On considère l'algorithme ci- contre :

```
Pour m allant de 1 à 12 faire:
    Pour j allant de 1 à 31 faire :
        B ← 12j + 31m
        Afficher B
    Fin Pour
Fin Pour
```

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. Deuxième méthode :

a. Démontrer que $B - 7m$ est un multiple de 12.

b. Compléter le tableau ci-dessous donnant les restes de la division euclidienne de $7m$ par 12 pour m variant de 1 à 12 :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$7m$	7	14												
Reste de la division euclidienne de $7m$ par 12	7	2												

c. En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur qui a obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul **Beta**.

3. Troisième méthode :

a. Démontrer que le couple $(-2\ ;\ 17)$ est une solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

c. Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x;\ y)$ solution de l'équation $12x + 31y = 503$, tel que y soit compris entre 1 et 12. Déterminer ce couple.

d. En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur qui obtient le nombre 503 avec le programme de calcul **Beta**.

Partie C :

Le magicien décide de changer encore son programme de calcul.

Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre D défini par $D = 12j + 27m$ (programme de calcul **Delta**).

1. Calculer D pour un spectateur né le 17 avril.
2. Calculer D pour un spectateur né le 8 août.
3. Que peut-on dire de ce programme de calcul **Delta** ?

Seconde Partie : Exercices nationaux de 10h10 à 12h10

<u>A distribuer à 10h10</u>

La résolution est individuelle

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1 : *Pas mal de têtes*

(à traiter par tous les candidats)

Trois intrépides chevalières, Clara, Noémie et Violette, ont reçu la mission de débarrasser le pays d'un ignoble dragon possédant N têtes. Elles attaquent le dragon en obéissant aux règles suivantes :

- Lors de chacune de ses attaques, Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une ;
- Lors de chacune de ses attaques, Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux ;
- Lors de chacune de ses attaques, Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois.

Les attaques se déroulent dans l'ordre qu'elles souhaitent, une même chevalière pouvant attaquer plusieurs fois de suite ou s'abstenir. Le nombre de têtes encore en place après chaque attaque doit être un nombre entier. Ainsi, Clara ne peut attaquer que quand le nombre de têtes du dragon est pair ; pour Noémie, le nombre de têtes doit être multiple de 3, et il doit être multiple de 4 pour Violette.

Étude préliminaire

1. On donne un nombre entier positif x.

 a. Si le dragon possède $2x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Clara ?
 b. Si le dragon possède $3x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Noémie ?
 c. Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette ?
 d. Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie ?

2. Montrer que si $N = 12$, les combattantes peuvent s'organiser et vaincre le dragon.

3. Montrer que si $N = 2\ 023$, le dragon survit.

Autres situations

1. Soit k un entier naturel.

 a. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 8k$ têtes. Prouver que les trois chevalières peuvent ramener cet effectif à $4(k-1)$.
 b. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 4(4k+1)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $12k$.
 c. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 4(4k+3)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $4k$.

Quelques conclusions

1. On rappelle que nombre initial de têtes du dragon est N.

 a. Montrer que si N est un multiple de 4, alors le dragon peut être vaincu.
 b. Montrer que si N est un nombre pair, alors le dragon peut être vaincu.
 c. Montrer que si N est un multiple de 3, alors le dragon peut être vaincu.

2. Montrer que si N n'est ni pair ni multiple de 3, alors le dragon survit.

Exercice 2 : Le bal des tangentes :

(à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Soit a un réel non nul, b, c et d des réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ pour tour } x \text{ réel.}$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α est notée T_α.

1. Si x et y sont des réels, montrer que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
2. On suppose qu'il existe deux réels distincts α et β tels que la droite T_α passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β.
Prouver que dans ce cas :

$$a(2\alpha + \beta) + b = 0.$$

3. Montrer qu'il n'existe pas trois réels distincts α, β et γ tels que les trois conditions suivantes soient réalisées :

La droite T_α passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β,
La droite T_β passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse γ,
La droite T_γ passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2 - 1)^2.$$

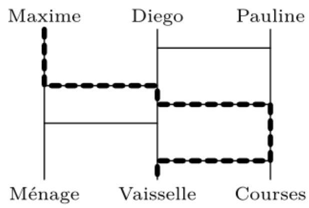
On appelle $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer des réels x_1, x_2, x_3, x_4 tels que les conditions suivantes soient réalisées :

La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_1 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_2,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_2 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_3,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_3 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_4,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_4 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_1.

Exercice 3 : *Amidakujis*

(candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Au Japon, les amidakujis sont utilisés comme méthode graphique de répartition aléatoire des tâches.



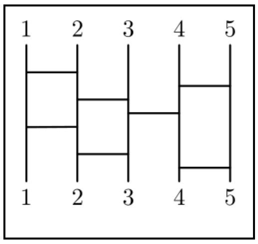
Dans l'exemple ci-contre, Maxime, Diego et Pauline sont colocataires et vont réaliser un amidakuji leur permettant de se répartir les tâches. Pour cela, ils tracent trois barres verticales, avec les prénoms placés au-dessus de chaque barre. Ils placent aussi les trois tâches au hasard, une en dessous de chaque barre verticale. Des barres horizontales sont ensuite placées de façon aléatoire dans les intervalles entre les barres verticales, de manière à ce que deux barres horizontales dans des intervalles voisins ne soient pas à la même hauteur.

Pour déterminer l'attribution d'une tâche, on part d'un prénom en descendant avec la règle suivante : à chaque fois que l'on rencontre une barre horizontale à gauche ou à droite, on la suit jusqu'à la prochaine barre verticale. Arrivé sur cette barre verticale voisine, on reprend la descente. On continue ainsi jusqu'à aboutir à une tâche, qui sera celle attribuée à la personne choisie en haut du diagramme. Dans l'exemple ci-dessus, Maxime fera la vaisselle.

Pour simplifier l'étude d'un amidakuji, on utilise des nombres entiers à la fois pour les points de départ et d'arrivée. Si partant de 2, on arrive à 3, on dira que 3 est l'image de 2, et que 2 est un antécédent de 3.

Pour résumer la répartition, on adopte la notation suivante : sur une première ligne, on indique les entiers de départ dans l'ordre croissant, et sur une deuxième ligne, on note en dessous de chaque entier le nombre entier obtenu à l'arrivée. Par exemple, dans l'amidakuji de Diego, Pauline et Maxime, l'image de 1 est 2, l'image de 2 est 1 et l'image 3 est 3, donc on note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Voici un autre exemple d'amidakuji avec 5 points.



- **a.** Recopier la figure et indiquer en couleur un chemin permettant de trouver l'image de 3.
- **b.** Déterminer un antécédent de 5 dans cet amidakuji. Tracer dans une autre couleur le chemin correspondant.
- **c.** Déterminer la notation de cet amidakuji.

2. Construire un amidakuji correspondant à

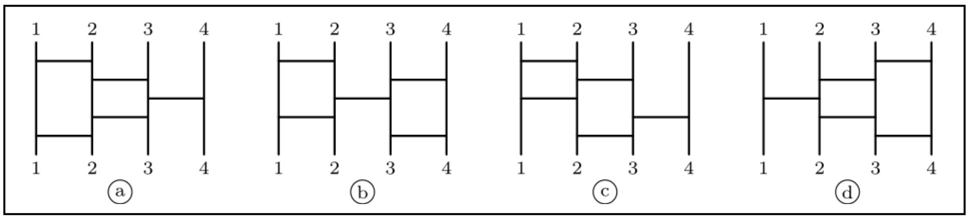
a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Est-il possible que dans un amidakuji, une tâche ne soit pas attribuée ? Si oui, donner un exemple. Sinon, donner une méthode pour retrouver la personne correspondante.

4. On considère dans cette question un amidakuji à 3 points.

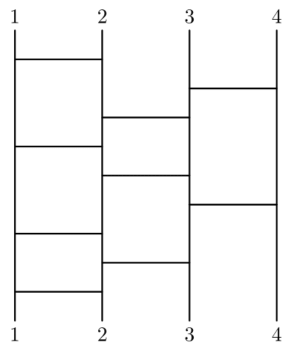
- **a.** De combien de façons différentes peut-on attribuer trois tâches distinctes à trois personnes distinctes ?
- **b.** On dispose au choix 0, 1, 2 ou 3 barres horizontales. Combien d'amidakujis différents obtient-on au total ?

5. Déterminer l'amidakuji qui ne donne pas la même attribution que les autres parmi les suivants :



6. En construisant un amidakuji, le placement de certaines barres horizontales peut parfois s'avérer superflu.

- **a.** Justifier que si deux barres horizontales dans le même intervalle ne sont pas séparées par une autre barre horizontale dans un intervalle voisin, elles peuvent être supprimées.
- **b.** Justifier que lorsque la configuration  apparaît au sein d'un amidakuji, elle peut être remplacée par  sans modifier le reste de l'amidakuji.
- **c.** À l'aide de ces techniques, recopier et simplifier l'amidakuji ci-contre de manière à n'utiliser que 3 barres horizontales. On donnera un schéma pour chaque étape intermédiaire, en entourant la partie modifiée.



7. Dessiner un amidakuji noté $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant 3 barres horizontales, puis un amidakuji noté $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant 6 barres horizontales.