Éléments de correction

Olympiades de mathématiques zone Amérique- Antilles-Guyane

Partie Académique

Exercice commun : règle de GOLOMB

Partie 1

1.a. 1 se mesure entre deux graduations successives p et $p+1$ pour $0 \leq p \leq 11$: 12 manières

1.b. 2 se mesure entre deux graduations p et $p+2$ pour $0 \leq p \leq 10$: 11 manièresA

1.c. n se mesure entre deux graduations p et $p+n$ pour $0 \leq p \leq 12-n$: $13-n$ manières

2.a.

Mesures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nbre de manières	2	4	3	2	3	1	3	1	1	1

Avec la règle A,
Oui, il est possible de mesurer toutes les distances entières de 1 à 10
Il y a pas mal de distances entières mesurables qui ne le sont pas de manière unique, comme l'indique le tableau.

2.b.

Mesures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nbre de manières	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1

Avec la règle B,
Il n'est pas possible de mesurer les distances 8 et 10.
Cependant, toutes les distances entières mesurables le sont de manière unique.

3.a et 3.b voir 2a et 2b pour arguments

	Règle de Golomb	Règle parfaite
Règle A	non	non
Règle B	oui	non

4. Il existe deux règles de longueur 2

Règle comportant 3 graduations : 0 ; 1 ; 2	Avec cette règle, il existe deux manières de mesurer 1 : la règle n'est pas parfaite
Règle comportant 2 graduations : 0 ; 2	Avec cette règle, il est impossible de mesurer 1 : la règle n'est pas parfaite

5. Il s'agit d'une règle parfaite, ainsi que le prouve le tableau ci-contre :

Mesures	1	2	3
Nbre de manières	1	1	1

Il existe une autre règle parfaite de longueur 3 : [0 ; 2 ; 3]. Mais on peut la voir comme étant la symétrique de celle proposée par l'énoncé (symétrie par rapport au milieu de la règle ; ou même règle « retournée »)

6. Si on ne veut mesurer 1 que d'une seule manière il ne peut y avoir qu'une seule graduation intermédiaire.

I……I……I…..I…..I

Si c'est la graduation 1 : on ne peut pas mesurer 2. Si c'est la graduation 2 : on ne peut pas mesurer 1.
Si c'est la graduation 3 : on ne peut pas mesurer 2. Il n'existe donc pas de règle parfaite de longueur 4.

7. [0; 2; 5; 6]

Partie 2

1. À partir de $a_1 = 0$: de 0 à a_2 ou a_3 ou a_4 ou a_5 : 4 manières.
À partir de a_2 : De a_2 à a_3 ou a_4 ou a_5 : 3 manières
À partir de a_3 : 2 manières ; À partir de a_4 : 1 manière.
Donc, réponse : $4+3+2+1 = 10$.

2. En généralisant l’exemple précédant, on obtient alors le nombre de mesures possibles avec une règle de m graduations :

$(m-1)+(m-2)+\cdots+1; soit\ donc\ \dfrac{(m-1)m}{2}$

3. Avec une règle de m graduations, il existe $\frac{(m-1)m}{2}$ manières distinctes de procéder à des mesures.

Or la règle est parfaite, donc chaque distance mesurée doit l’être de manière unique. La règle est donc au moins de longueur $\frac{(m-1)m}{2}$.

Si sa longueur est supérieure à $\frac{(m-1)m}{2}$, alors nécessairement certaines distances ne sont pas mesurables.

Donc une telle règle est exactement de longueur $\frac{(m-1)m}{2}$.

4. Supposons qu’il existe une règle parfaite de longueur 5. Alors elle possède m graduations, m entier naturel, tel que $\frac{(m-1)m}{2} = 5$.

On aurait alors $m^2 - m - 10 = 0$. Mais il n’existe pas d’entier naturel solution de cette équation. Donc il n’existe pas de règle parfaite de longueur 5.

5.a) On considère que l’on a $a_2 = 1$. Si on suppose que $a_{m-1} = L - 1$, alors il existe deux manières de mesurer la longueur 1 et donc la règle n’est pas parfaite.

C’est une contradiction.

5.b) La règle doit permettre de mesurer la longueur L-2. Il n’existe que deux possibilités : $(0, L-2)$ et (2, L).

Si la règle possède la graduation $a_3 = 2$, alors on mesure la longueur 1 avec (0, 1) et avec (1, 2). La règle n’est alors pas parfaite. Ce n’est donc pas possible.

Ainsi on ne peut mesurer la longueur $L-2$ qu’avec les graduations (0, L-2). Et donc $a_{m-1} = L - 2$.

On note que la règle permet alors aussi de mesurer la longueur 2 avec les graduations (L-2, L). Par suite, on ne peut avoir $a_3 = 3$, sinon on mesurerait la longueur 2 avec (L-2, L) et avec (1, 3). Donc $a_3 \geq 4$.

De même $a_{m-2} \leq L-5$, sinon avec $a_{m-2} = L-4$ on mesure 2 avec (L-4, L-2).

Mais on doit pouvoir mesurer la longueur L-4.

Donc nécessairement $a_3 = 4$.

5.c) Si la longueur de la règle est 10, alors $m = 5$ et nous avons la règle [0 ; 1 ; 4 ; 8 ; 10]. On ne peut pas mesurer la longueur 5 et la règle n’est donc pas parfaite.

Si la longueur de la règle est $L \geq 11$ alors $m \geq 6$ et en fait $L \geq 15$ puisque d’après ce qui précède, la longueur est forcément un nombre triangulaire. En suivant le même raisonnement que précédemment, on a $a_{m-2} \leq L-6$ pour éviter que certaines longueurs soient mesurées de deux manières. Mais alors la longueur $L-5$ ne peut être mesurée. Et donc la règle n’est pas parfaite.

6. Nous avons trouvé des règles parfaites de longueur 3 ou 6 (questions 1.5 et 1.7)

Nous avons prouvé qu’il n’existe pas de règle parfaite de longueur 4 ou 5 (questions 1.6 et 2.4).

Puis nous avons prouvé qu’il n’existe pas de règle parfaite de longueur $L \geq 7$ (question 2.5). Les règles parfaites sont donc très rares !

Exercice spé : Léonard le talentueux

Partie 1

1) p doit appartenir à [0 ;1]. L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{p}{2}$ et l'aire du carré est 1.

Les trois parties ont la même aire si et seulement si $\frac{p}{2} = \frac{1}{3}$ soit $p = \frac{2}{3}$

Comme $\frac{2}{3}$ appartient à [0 ;1], on en déduit que Léonard doit donner à p la valeur de $\frac{2}{3}$ pour que les trois aires soient égales.

L'aire de chacun des triangles rectangles DCI et ADH est $\frac{p}{2}$.

L'aire du triangle DHI est $1 - p - \frac{(1-p)^2}{2}$ soit $\frac{1-p^2}{2}$. Les trois parties ont la même aire si et seulement si $p^2 + p - 1 = 0$.

2) L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes dont une seule appartient à l'intervalle [0 ;1] : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Les trois triangles peuvent donc avoir la même aire, c'est le cas si et seulement si $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) Dans le repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. on a :$A(0;0), D(0;1), C(1;1), H(p;0), I(1;1-p)$, $K(1;1-p)$.

Les droites (HJ), (DI) et (AC), distinctes 2 à 2, sont concourantes si K, point d'intersection de (AC) et (HJ), appartient à (DI), c'est-à-dire si $\overrightarrow{DK}$ $(p, p-1)$ et $\overrightarrow{DI}$ (1, -p) sont colinéaires. Det $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DK})$ = $p^2 + p - 1$ = 0.

On en déduit que les deux vecteurs sont colinéaires et que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont bien concourantes.

Partie 2

1) Les aires des triangles rectangles DCI et ADH sont respectivement $\frac{a\,m}{2}$ et $\frac{b\,p}{2}$ et l'aire du rectangle est ab. Les trois parties ont la même aire si et seulement si

$\frac{a\,m}{2} = \frac{b\,p}{2} = \frac{a\,b}{3}$ soit $p = \frac{2}{3}a$ et $m = \frac{2}{3}b$. On vérifie que p appartient à [0 ; a] et que m appartient à [0 ; b]. On en déduit que Léonard a raison.

L'aire du rectangle tronqué est : $ab - \frac{(b-m)(a-p)}{2}$.

Les trois parties ont même aire si et seulement si $\frac{a\,m}{2} = \frac{b\,p}{2} = \frac{1}{3}\left(ab - \frac{(b-m)(a-p)}{2}\right)$,

Soit $am = bp$ et $3am = 2ab - (b-m)(a-p)$.

2) Soit $am = bp$ et $2am - bp - ab + mp = 0$.

Ce qui est équivalent, après calculs, à $am = bp$ (1) et $p^2 + ap - a^2 = 0$ (2)

L'équation $x^2 + ax - a^2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes dont une seule appartient à l'intervalle [0 ; a] : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \alpha a$. On obtient $p = \alpha a$

En remplaçant cette valeur dans (2), on obtient $m = \alpha b$, qui appartient bien à [0 ; b]. Léonard a encore raison.

Dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$, on a : $\mathrm{A}(0;0), \mathrm{D}(0;b), \mathrm{C}(a;b), \mathrm{H}(p;0), \mathrm{I}(a;b-m)$.

La droite (AC) a pour équation $y = \frac{b}{a}x$.

3) On en déduit le couple des coordonnées de K : $(p\,;\frac{b}{a}p)$. On raisonne comme dans la partie 1. Les droites (HJ), (DI) et (AC), distinctes 2 à 2, sont concourantes en K si $\overrightarrow{\mathrm{DK}}$ $\left(\mathrm{p}\,;\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}(\mathrm{p}-\mathrm{a})\right)$ et $\overrightarrow{DI}$ $(a, -m)$ sont colinéaires.

Det $\left(\overrightarrow{\mathrm{DI}}, \overrightarrow{\mathrm{DK}}\right) = \mathrm{bp} - \mathrm{ab} + \mathrm{mp} = \mathrm{ab}(\alpha^2 + \alpha - 1) = 0$. On en déduit que Léonard a une nouvelle fois raison.

Exercice non spé : un tour de magie

Partie A :

1. $j = 1$ *et* $m = 8$ *donne* $A = 308$

2. a. $A = 12j + 37m$. *Puis* $A - m = 12j + 36m = 12(j + 3m)$ est un multiple de 12

2. b. Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (Alpha).

$A = 474$. *Or* $1 \leq m \leq 12$ *donc* $474 - 12 \leq A - m \leq 474 - 1$ soit $462 \leq A - m \leq 473$;

Comme $A - m$ est un multiple de 12, Alors $A - m = 468$, on en déduit que $m = A - 468 = 6$

puis que $j = (474 - 37 \times 6) / 12 = 21$. <u>Il s'agit donc du 21 juin</u>

Partie B :

1. **Première méthode :** algorithme modifié afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que : 12 j + 31m = 503.

```
Pour m allant de 1 à 12 faire :
   Pour j allant de 1 à 31 faire :
      z ←12j +31m
       Si z = 503 alors afficher j et m
   Fin Pour
Fin Pour
```

2. a) $B - 7m = 12(j + 2m)$ est un multiple de 12

2. b) le tableau ci-dessous donne les restes de la division euclidienne de 7m par 12, pour m variant de 1 à 12 :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7m	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
reste de la division euclidienne de 7m par 12	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

2. c) $503 - 7m = 41 \times 12 + 11 - 7m$ est un multiple de 12 donc $11 - 7m$ est un multiple de 12.D'où $m = 5$; puis $B = 12j + 31 \times 5$ donne $j = 29$. Il <u>s'agit donc du 29 mai</u>

3. a) **Troisième méthode :** a. $12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$, donc le couple (−2 ; 17) est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

3. b) $12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17$ donne le résultat

3. c) c. On peut utiliser la table de valeurs de la fonction $t \mapsto 31(17 - B)/12$ pout t compris entre 1 et 12 pour trouver la seule valeur de t entière . On obtient ensuite $y = 5$ et $x = 31 - 2 = 29$.
On vérifie que $12 \times 29 + 31 \times 5 = 503$

3. d) $x = 29$ est compris entre 1 et 31 et $y = 5$ est compris entre 1 et 12, <u>il s'agit du 29 mai</u>

Partie C :

1. Pour un spectateur né le 17 avril, $D = 12 \times 17 + 27 \times 4 = 312$

2. Pour un spectateur néle 8 août, $D = 12 \times 8 + 27 \times 8 = 312$

3. Ce programme ne permet pas toujours de retrouver la date d'anniversaire du spectateur

Partie Nationale

Exercice 1 : *Pas mal de têtes*

Étude préliminaire

1. *a.* Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une, donc elle en coupe $x+1$ et il en reste $x-1$.
b. Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux, donc elle en coupe $x+2$ et il en reste $2x-2$.
c. Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois, donc elle en coupe $x+3$ et il en reste $3x-3$.
d. Dans le cas d'un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie, on passe de $4x$ à $3x-3$ puis à
$2x-2-2=2x-4$
2. On suppose que $N=12$. Violette commence, et coupe $3+3=6$ têtes. Il en reste 6. Noémie en coupe 4 et il en reste 2 et Clara en coupe $1+1=2$ et c'est fini.
3. Dans le cas $N=2\,023$, nombre qui n'est ni pair ni multiple de 3 ($2\,023=7\times17^2$), aucune de chevalières ne peut commencer l'étêtage.

Autres situations

1. *a.* On suppose que le dragon possède $8k$ têtes. Cet effectif est un multiple de 4. Violette mène l'assaut et ramène cet effectif à $6k-3$. Noémie peut lui succéder et le nombre de têtes devient $4k-4=4(k-1)$.
b. Si l'effectif initial est $4(4k+1)$, Violette en coupe $4k+1+3=4k+4$ et il en reste … $12k$.
c. Si l'effectif initial est $4(4k+3)$, on lance Violette qui coupe $4k+3+3$ têtes et il en reste $12k+6$. On lance Noémie qui en coupe $4k+2+2=4k+4$ et il en reste $8k+2$. Clara arrive et coupe $4k+1+1=4k+2$. Il reste alors $4k$ têtes au dragon.

Quelques conclusions

1. *a.* On suppose que N est un multiple de 4. La question précédente examine tous les types de multiples de 4 :
Les produits de 4 par des nombres pairs s'écrivent $8k$, les produits de 4 par des nombres impairs s'écrivent $4(4k+1)$ ou $4(4k+3)$. Dans ces trois situations, on a montré qu'on pouvait passer d'un multiple de 4 à un autre multiple de 4, plus petit. Le plus petit multiple de 4 non nul est 4, et alors c'est Violette qui agit.
b. On suppose que N est pair. La question précédente règle le cas des multiples de 4, il reste à examiner les multiples impairs de 2. Si $N=2(2k+1)$, on fait intervenir Clara, qui ramène l'effectif à … $2k$, c'est-à-dire à un effectif pair plus petit que le précédent. Le plus petit effectif pair est 2 et c'est Clara qui agit.
c. Si N est un multiple de 3, ou bien c'est le produit de 3 par un nombre pair, il est pair et on utilise la démarche précédente, ou bien $N=3(2k+1)$. Noémie coupe $2k+1+2=2k+3$ têtes et il en reste $4k$ et le problème est résolu.
2. Dans le cas où N n'est ni pair ni multiple de 3, aucune des chevalières ne peut intervenir. Elles ont échoué.

Exercice 2 : Le bal des tangentes

1. On obtient l'égalité en développant le membre de droite.

2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α a pour pente $f'(\alpha)$, c'est-à-dire $3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$. Dire qu'elle passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β, c'est dire que :

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d - (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = (3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)(\beta - \alpha)$$

$$a(\beta^3 - \alpha^3) + b(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)(3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)$$

Comme α et β sont distincts, cette égalité fournit :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + b(\alpha + \beta) + c = 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

Ou encore :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2) + b(\beta - \alpha) = 0$$

On met $(\beta - \alpha)$ en facteur là où on peut :

$$a(\beta - \alpha)(\beta + 2\alpha) + b(\beta - \alpha) = 0$$

Et on obtient après simplification la relation demandée.

3. La condition proposée se traduit par les trois égalités, simultanément réalisées :

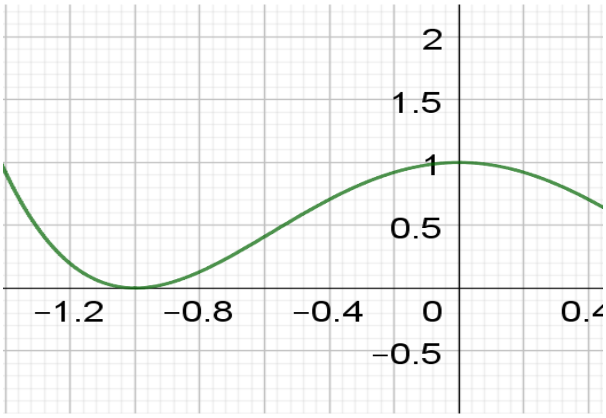
$$\begin{cases} a(2\beta + \alpha) + b = 0 \\ a(2\beta + \gamma) + b = 0 \\ a(2\gamma + \alpha) + b = 0 \end{cases}$$

Si cela a lieu, alors $2\alpha + \beta = 2\beta + \gamma = 2\gamma + \alpha$.

Ces égalités s'écrivent aussi : $2\alpha = \beta + \gamma, 2\beta = \gamma + \alpha, 2\gamma = \alpha + \beta$.

De trois nombres réels, chacun est la moyenne des deux autres. Ils sont donc égaux. Mais cela contredit l'hypothèse qui les prenait distincts.

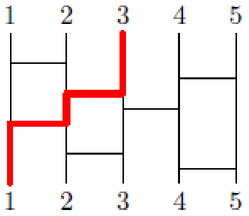
4. Il se trouve que, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes à la courbe représentative de la fonction sont confondues et on peut par conséquent « tourner » sur les points de la courbe d'abscisses -1 et 1 pour en faire une liste de quatre points (pas distincts).



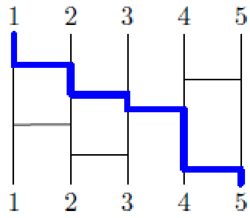
Exercice 3 : ***Amidakujis***

1.

a.



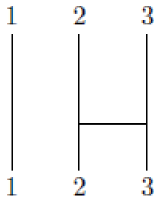
b.



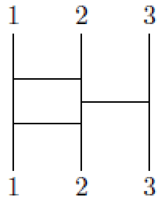
c. On a déjà déterminé que 5 est attribué à 1 et que 1 est attribué à 3. On détermine de même que 2 est attribué à 5, 3 est attribué à 2, et 4 est attribué à 4. D'où : $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$.

2.

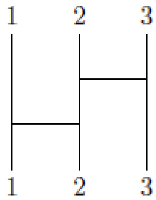
a.



b.



c.



3. En appliquant le même principe de parcours dans un amidakuji mais en partant d'un numéro du bas et en remontant, on aboutit à un numéro du haut donc toutes les tâches sont attribuées.

4. a. D'après la question précédente chaque personne réalise une tâche et chaque tâche est réalisée par une personne. Le nombre d'attributions des tâches est donc le nombre de triplets formés avec les trois numéros 1, 2 et 3 c'est-à-dire $3 \times 2 \times 1 = 6$.

b. Il y a trois barres verticales délimitant deux bandes verticales qu'on va appeler G(gauche) et D(droite).

Sans barre horizontale, on ne peut faire qu'un seul amidakuji.

Avec une seule barre horizontale, il y a deux possibilités de placement de cette barre : dans G ou dans D. On a donc alors 2 amidakujis.

Avec deux barres horizontales, il y a toujours pour chaque barre deux hauteurs possibles : B (basse) ou H (haute) et deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 = 4$ amidakujis dans ce cas.

Avec trois barres horizontales, on reprend le même raisonnement mais avec cette fois-ci trois hauteurs possibles : B, M (moyenne) et H et, pour chaque hauteur deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ amidakujis dans ce cas.

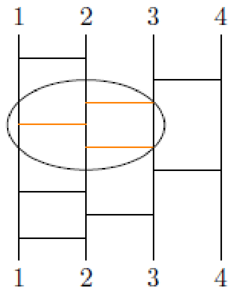
Au total, on obtient $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ amidakujis différents.

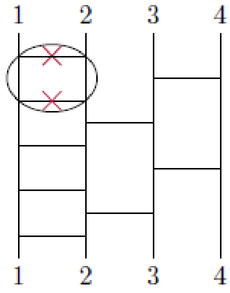
5. Les amikadujis *a*, *b*, et *d* correspondent à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, tandis que *c* correspond à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$. L'amikaduji recherché est donc celui du c.

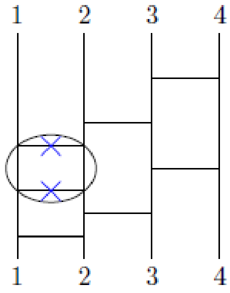
6. a. En cherchant le chemin d'attribution d'une tâche, la première barre horizontale fait changer de barre verticale, tandis que la seconde barre horizontale rencontrée fait revenir à la barre verticale initiale. Ces barres horizontales non séparées par une autre barre horizontale dans un intervalle voisin sont donc superflues.

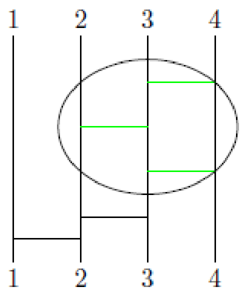
b. On constate que les deux configurations (elles-mêmes amidakujis) correspondent à la même permutation, donc ils peuvent être échangés, à condition qu'il n'y ait pas de barre horizontale s'intercalant avec ce morceau d'amidakuji, avant ou après échange.

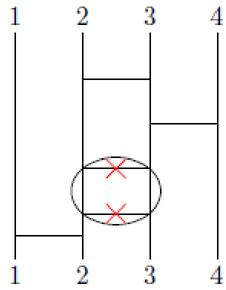
c. Voici les étapes :

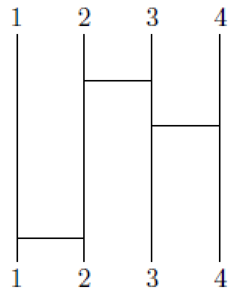












7.