RÉGION ACADÉMIQUE
GUADELOUPE
Liberté
Égalité
Fraternité

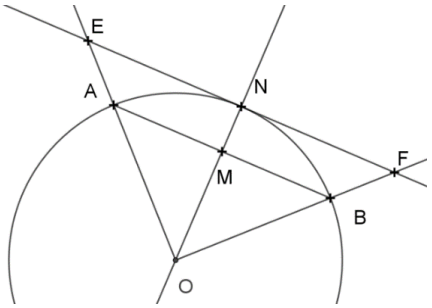
Eléments de correction
Olympiades 2022 inter-académiques de mathématiques collège

Quelques principes :
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

	Éléments de correction
	Exercice 1
1.	$2+9=11$, et $7+6+4+6=23$. Les poids demandés sont 11 et 23.
2.	**2.** Les nombres 777 777 , 6 666 666 et 69 999 ont tous pour poids 42.
3.	Le nombre 11 a deux chiffres, le nombre 8 en a un. L'affirmation est donc fausse.
4.	Le nombre 99 999 est le nombre de poids le plus élevé s'écrivant avec cinq chiffres. Son poids est 45 . On doit donc chercher un nombre s'écrivant avec six chiffres, dont un 5. Le plus petit de tels nombres est 599 999.
5.	Le nombre qui s'écrit avec 224 chiffres 9 a pour poids 2 016. Comme précédemment, le nombre qui s'écrit avec 224 chiffres 9 précédés d'un 6 est le nombre cherché.
6.	Les multiples de 7 inférieurs à 53 ont pour chiffre des unités $7, 4, 1, 8, 5, 2, 9$. On leur ajoute un multiple de 5, dont le chiffre des unités est 5 ou 0 ; la seule possibilité que cette somme ait pour chiffe des unités 3 est $28+25$. Les nombres cherchés s'écrivent avec quatre chiffres 7 et cinq chiffres 5, comme par exemple 777 755 555.
7.	La somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 6 est un multiple de 3. 200 n'est pas un multiple de 3. La réponse à la question est donc NON.

Exercice 2 : *Carré inscrit dans un cercle inscrit dans un carré…*

	Éléments de correction
	Exercice 2
1.	ABCD possède deux diagonales perpendiculaires se coupant en leur milieu : c'est un losange. Comme ces diagonales ont la même longueur, ABCD est un carré.
2.	Le triangle AOB est rectangle isocèle, les côtés de l'angle droit ont pour longueur 2. D'après le théorème de Pythagore, on a donc $AB^2=4+4=8$. Cette valeur est aussi l'aire du carré ABCD. L'aire du disque de centre O et de rayon 2 est $\mathcal{A}=4\pi$. L'aire de la partie grisée est donc $\mathcal{G}=4\pi-8$ ou encore $\mathcal{G}=4(\pi-2)$.
3.	On considère les triangles emboités OAB et OEF. Ces triangles sont isocèles rectangles et si on désigne par M le milieu de [AB] et par N le milieu de [EF], alors comme MA = MB et OA = OB, la droite (ON) est médiatrice de [AB]. De même la droite (OM) est médiatrice de [EF] et les triangles OMA et ONE sont deux triangles emboités, eux-mêmes rectangles et isocèles respectivement en M et N (angle en A comme en E de 45°). On en déduit que :

	- d'après le théorème de Pythagore $\mathrm{OM}^2 + \mathrm{AM}^2 = \mathrm{OA}^2 = 4$ ou encore $2\mathrm{OM}^2 = 2\mathrm{AM}^2 = 4$ Finalement $\mathrm{AM} = \mathrm{OM} = \sqrt{2}$ - d'après le théorème de Thalès, les droites (AM) et (EN) étant parallèles, on a : $\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{AM}}$. D'où $\mathrm{OE} = \mathrm{OA} \times \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 \times \sqrt{2}$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Le côté du carré EFGH a donc pour longueur 4 et le rayon du cercle $\mathcal{C}_2$ est $2 \times \sqrt{2}$.  La même suite de calculs que précédemment nous fournit l'aire du carré EFGH : 16 et celle du disque de bord $\mathcal{C}_2$: 8π. L'aire de la partie grisée est donc $\mathcal{G}_2 = 8(\pi - 2)$.
4.	On fait la constatation que l'aire grisée double de la première situation à la seconde. La construction réalisée est la même pour la suite, donc on peut admettre que l'aire double encore pour la troisième figure. Elle est donc $\mathcal{G}_2 = 16(\pi - 2)$.

Exercice 3 : ***Triplets pythagoriciens***

	Éléments de correction
	Exercice 3
1.	On calcule : $\mathrm{BC}^2 = 289, \mathrm{AB}^2 = 64$ et $\mathrm{AC}^2 = 225$ et on constate que $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$. La réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en A.
2.a.	Comme [BC] est le côté ayant la plus grande longueur, le triangle est rectangle en A
2.b.	On a en effet $25 = 16 + 9$.
2.c.	Selon l'hypothèse, m et n sont des nombres entiers inférieurs à 5 et non nuls puisqu'il s'agit des longueurs des côtés d'un triangle. Le tableau ci-contre donne toutes les sommes $m^2 + n^2$ sous cette hypothèse. On n'obtient 25 que pour $m = 3$ et $n = 4$.

m \ n	1	2	3	4
1		5	10	17
2			13	20
3				25

3.a.	On développe : $p(p+n) - n(p+n) = p^2 - n^2$, et comme $p^2 = n^2 + 25$ on a l'égalité demandée.
3.b.	les nombres entiers $p + n$ et $p - n$ ont pour produit 25. Ils ne sont pas égaux. On a donc $p - n = 1$, donc $p = n + 1$ et $2p - 1 = 25$, ce qui conduit au triplet $(5, 12, 13)$.
3.c.	m est un entier non nul inférieur ou égal à 4. Examinons les valeurs possibles de $m^2 + 25$ Aucun des nombres figurant sur la deuxième ligne n'est un carré parfait. Par conséquent, aucun triplet $(m, 5, p)$ respectant les hypothèses initiales n'est pythagoricien

m	1	2	3	4
$m^2 + 25$	26	29	34	41

Exercice 4 : *Angle inconnu*

	Éléments de correction
	Les angles $\widehat{EAD}$ ET $\widehat{EDA}$ ont la même mesure (triangle isocèle) et cette mesure est la moitié de celle de $\widehat{DEC}$ (angle supplémentaire de l'angle au sommet du triangle isocèle). De même les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{DBE}$ ont même mesure, et cette mesure est la moitié de celle de $\widehat{CED}$. Il s'ensuit que la somme des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{BED}$ est la moitié de la somme des angles en D et E du triangle CDE. Cette somme est 110°, et donc la somme des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{BED}$ est 55°. Leur supplémentaire, l'angle en F du triangle DEF et l'angle cherché, qui sont opposés par le sommet, ont donc pour mesure 125°.