Olympiades Académiques de Mathématiques

Académie de la Guadeloupe
Session 2010
Durée : 4 heures

L'épreuve est constituée de quatre exercices, deux nationaux et deux académiques.
Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Il sera tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.
La calculatrice est autorisée.

<u>Exercice Académique 1</u> : *Carrés parfaits !*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer tous les carrés ABCD d'aire 20 vérifiant les conditions suivantes :

- A appartient à l'axe des abscisses
- B appartient à l'axe des ordonnées
- Les coordonnées de A, B, C et D sont des entiers naturels.

<u>Exercice Académique 2</u> : *Polygones réguliers*

« Dans un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, la somme des carrés des distances entre un sommet et les autres sommets est égale à 2n ».

Vérifier la propriété pour :

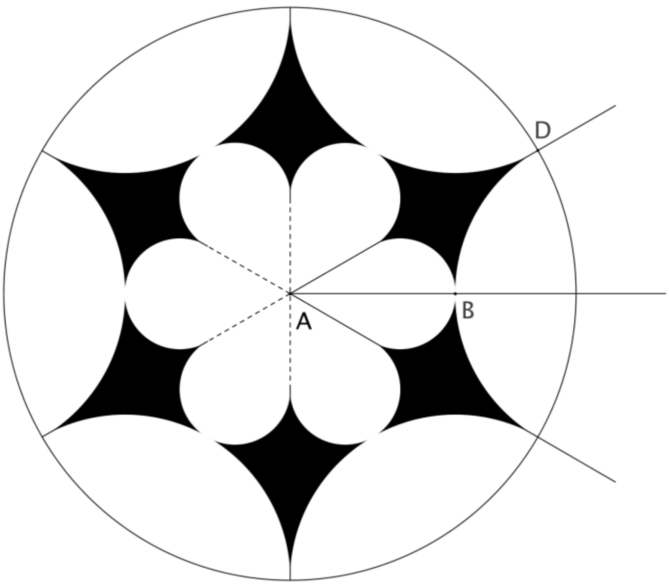
a) $n = 3$
b) $n = 4$
c) $n = 5$

On pourra admettre que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

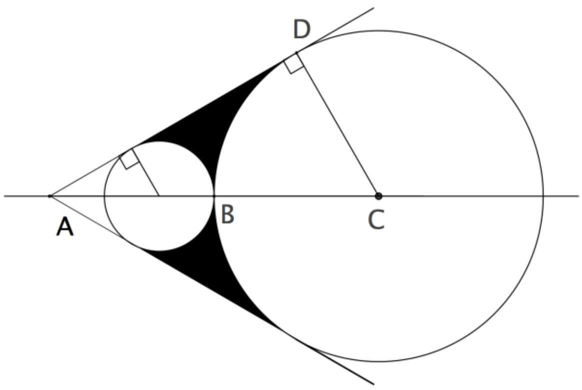
<u>Exercice National 1 :</u> ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice National 2 :</u> ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
«Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.