Document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège

SOMMAIRE :

NOTE :

Dans le langage propre au socle commun, les compétences désignent les sept piliers et sont déclinées ensuite en connaissances, capacités et attitudes. Pour respecter cette terminologie officielle et échapper à la lourdeur consistant à parler à chaque fois des connaissances, capacités et attitudes relatives à telle compétence du socle, nous emploierons le mot « ***aptitude*** ».
Une aptitude comprend donc, en général, une connaissance et une capacité liée à cette connaissance et met en œuvre une ou plusieurs attitudes.

I. Le programme de mathématiques et le socle

1. Introduction

Les nouveaux programmes de mathématiques du collège, publiés au B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007 se distinguent des précédents par la mise en évidence, à l'intérieur même des programmes, des exigences de formation du socle commun de connaissances et de compétences. Cette dualité entre l'ensemble des connaissances et capacités figurant au programme proprement dit et le sous-ensemble de celles qui relèvent – à un niveau donné – des exigences du socle commun (identifiées par des caractères romains dans le programme) crée des exigences nouvelles pour la formation et l'évaluation des élèves.

Il faut d'abord rappeler que ***l'acquisition du socle commun par tous les élèves est une obligation*** du service public d'éducation inscrite dans la loi :

> « *La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société* »[1] .

Cette acquisition constitue, en mathématiques comme dans les autres champs disciplinaires, ***la priorité pour la formation des élèves*** : le socle constitue le cœur du programme et, comme tel, sa maîtrise est indispensable à toutes les poursuites d'études comme à la vie en société.

> ***Le présent document d'application a pour ambition de montrer, à la fois*** par des indications générales et par des exemples***, comment l'enseignant de mathématiques peut gérer, en termes de formation et en termes d'évaluation, cette double exigence de l'acquisition du socle par tous les élèves et de l'avancement dans le programme.***

1. La formation des élèves en mathématiques

L'acquisition des connaissances et compétences du socle commun est, d'après la loi, une priorité de l'enseignement au collège. Mais, en même temps, le programme dans son ensemble doit être dispensé aux élèves. C'est d'autant plus important que, dans de nombreux cas, les notions qui ne relèvent pas du socle à un niveau donné – celles qui figurent en caractères italiques étoilés dans les programmes – se retrouvent exigibles pour le socle commun l'année suivante : on a voulu ainsi laisser plus de temps aux élèves les plus fragiles pour acquérir ces capacités et il est donc indispensable qu'elles soient travaillées par tous dès l'année où elles sont introduites dans le programme.

Qu'en est-il des connaissances et capacités qui figurent en caractères italiques non étoilés dans le programme – et elles sont nombreuses en 3^{e} – c'est-à-dire qui font partie du programme de collège mais n'entrent pas dans le socle ? Comme il est dit plus haut, elles doivent être travaillées en classe puisque faisant partie du programme, mais ne peuvent être considérées comme une priorité.

Les grilles de référence du socle commun de connaissances et de compétences constituent un document pédagogique à destination des enseignants pour leur permettre d'identifier précisément, à un niveau donné, les attendus (« éléments du socle exigibles ») pour l'acquisition du socle par les élèves, de disposer d'indications pour concevoir leurs évaluations et pour renseigner les livrets de compétences. Mais elles constituent aussi, en liaison avec le programme, un outil précieux de cadrage pour la formation des élèves.

---

[1] Loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École, n°2005-380 du 23 avril 2005, article 9.

Quelles sont les exigences de formation induites par le socle ? Incontestablement, la résolution de problèmes y a une place importante. Ce n'est pas parce que cette exigence d'acquisition du socle commun concerne des élèves fragiles ou en difficulté en mathématiques que la formation qui leur est dispensée doit se cantonner dans l'apprentissage de techniques ou la mise en application de recettes. En effet, la résolution de problèmes est essentielle pour rendre opérationnelles les aptitudes à construire, notamment dans le cadre du socle. Elle occupe donc une place importante dans la formation, comme dans l'évaluation :

> « *…les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne […] La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.* »[2]

Quelles sont donc les priorités, en termes de formation, pour l'acquisition des éléments de mathématiques inscrits dans le socle ?

- Incontestablement, la maîtrise du calcul réfléchi inséparable du sens des nombres et des opérations.
- L'acquisition d'automatismes qui favorisent l'autonomie et l'initiative des élèves dans la résolution de problèmes et les mettent en confiance.
- La mise en place permanente de l'activité de raisonnement qui est l'essence même des mathématiques.

Il ne faut pas oublier, tout particulièrement dans le cadre de l'acquisition du socle commun, que pour certains élèves, apprendre peut prendre du temps et qu'il ne faut donc pas hésiter à revenir souvent et par petites touches sur les « fondamentaux » afin de laisser à chaque élève le temps d'acquisition dont il a besoin.

2. L'évaluation au collège

La résolution de problèmes doit constituer le vecteur principal de l'évaluation. Cela est vrai aussi bien pour l'évaluation de l'acquisition du programme que pour celle du socle commun : l'évaluation ne peut être pertinente que si elle porte sur les attendus.

Pour chaque niveau d'évaluation, la grille de référence du socle relative aux mathématiques est structurée en deux parties : une partie portant plus spécifiquement sur les connaissances, réparties dans les quatre champs du programme et une partie consacrée à la résolution de problèmes. Dans l'esprit des rédacteurs, les connaissances liées aux quatre champs du programme peuvent être évaluées dans des problèmes courts (exercices) mais ayant du sens.

Pour un professeur, il n'est pas possible de gérer, dans chaque classe et pour chaque élève deux systèmes d'évaluation, un pour le programme et l'autre pour le socle. Il est donc indispensable que les outils d'évaluation actuellement utilisés (devoirs de contrôle, évaluation diagnostique, travaux pratiques, travaux à la maison, utilisation des TICE) soient repensés de manière à permettre de mesurer à la fois la maîtrise du programme et l'acquisition des aptitudes du socle commun. Nous proposerons quelques pistes concrètes, expérimentées par des enseignants, susceptibles d'aider à relever le défi posé par cette double évaluation.

[2] Décret, relatif au socle commun, n°2006-830 du 11 juillet 2006.

II. La formation des élèves

Mettre en œuvre le socle commun consiste concrètement à faire vivre en classe deux objectifs de formation :

- Permettre aux élèves d'acquérir les mathématiques nécessaires à une poursuite d'études (autrement dit, le programme), objectif qui doit rester **l'ambition pour tous.**
- Donner à tous la culture mathématique nécessaire au citoyen (autrement dit, permettre aux élèves d'acquérir les connaissances et compétences du socle commun), objectif que l'on peut qualifier de **nécessaire pour tous.**

1. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes

a) Des problèmes pour découvrir un nouveau savoir

Pour donner du sens aux mathématiques enseignées et cultiver chez les élèves le goût de faire des mathématiques, les programmes recommandent d'introduire certaines notions au travers d'une situation-problème. L'intérêt de cette démarche est de montrer la pertinence de l'outil construit pour la résolution du problème.
Les situations choisies dans ce cadre doivent permettre à **tout élève** de s'engager avec ses acquis du moment et donc, ne reposer que sur des consignes simples, n'exiger que des connaissances solidement acquises. Chaque élève est ainsi conduit à exercer les aptitudes dont il dispose et à en identifier les limites. La mutualisation des différentes procédures apparues dans la classe permet de présenter dans les meilleures conditions le savoir nouveau visé en lui donnant toutes les chances d'être perçu comme utile voire indispensable. Les élèves sont ainsi en état de le recevoir puis de se l'approprier.

> ***Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun et faire cohabiter harmonieusement tous les objectifs de formation visés, il est essentiel de veiller à ce que ce type de problème offre une véritable activité mathématique à tout élève sans oublier celui qui n'accèdera peut-être pas à la modélisation ou à la stratégie experte visée.***

Exemple : des programmes de calcul pour introduire la résolution des équations du type $ax+b=cx+d$, notion qui ne fait pas partie des exigibles du socle commun.

Problème 1

Emma et Zoé ont chacune une calculatrice. Elles ont « tapé » le même nombre.
Ensuite, Emma a appuyé sur les touches :

$\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

et, Zoé a appuyé sur les touches :

$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$

Surprise ! Elles obtiennent le même résultat ! Quel nombre ont-elles bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent s'engager dans l'étude de ce premier problème, ne serait-ce qu'en faisant des essais. Ils peuvent aboutir en tâtonnant puisque la solution est décimale. Certains peuvent recourir au calcul littéral et résoudre l'équation $2x+3=4x$ de « façon artisanale » par exemple en mobilisant le sens des opérations ou en décomposant $4x$ en $2x+2x$ pour constater que $2x=3$. La mutualisation des différentes démarches permet l'enrichissement de chacun avant que le problème 2 ne soit abordé.

Problème 2

Yuna et Pierre ont chacun une calculatrice. Ils ont « tapé » le même nombre. Ensuite, Yuna a appuyé sur les touches : $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ et, Pierre a appuyé sur les touches : $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ Surprise ! Ils obtiennent aussi le même résultat ! Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent encore s'engager dans l'étude de ce second problème en faisant des essais mais la méthode par essai-erreur atteint ses limites puisque la solution n'est pas décimale. Cependant, aucun élève n'est en échec, chacun étant en mesure d'approcher la solution. Les élèves qui n'avaient fait que quelques essais désordonnés lors de l'étude du problème 1 vont peut-être cette fois organiser leurs essais de façon efficace. Des élèves qui n'avaient pas été tentés de recourir au littéral pour le problème 1 peuvent y penser puisqu'ils ont entendu des camarades s'exprimer à ce sujet lors de la synthèse faite sur le problème 1. Poussés dans leur retranchement, les meilleurs peuvent utiliser des stratégies très proches de la stratégie experte. Chacun a donc fait un pas de plus.
Au cours de ce travail, les élèves en difficulté ne sont pas en échec. Mieux encore, ils peuvent consolider leur maîtrise de compétences complexes telles que « identifier un problème, … élaborer une stratégie pour y répondre ». En outre, leur travail de « tâtonnement » est utile à tous puisqu'il donne du sens à ce qu'est une résolution d'équation.

Voir en annexe 1, des productions d'élèves pour le problème 2 et un exemple de résolution « artisanale » de $5x+5=7x+3$.

Une fois ce travail terminé, les élèves sont prêts à entendre l'exposé d'une stratégie experte de résolution des équations du type $ax+b=cx+d$. Pour tirer le meilleur profit du travail préliminaire, cet exposé de type magistral, doit prendre appui sur la diversité des productions « artisanales » des élèves.

Remarque : La méthode de résolution par essai-erreur, qui est à valoriser lors de l'apprentissage, doit l'être encore lors de l'évaluation. Il faudrait donc veiller à proposer dans ce cadre des problèmes dont la solution est parfois décimale et suffisamment « simple » pour être accessible sans avoir recours à une mise en équation non exigible pour le socle commun. Pour autant, cela ne veut pas dire qu'il faut s'interdire en évaluation de proposer des équations dont la solution n'est pas décimale.

Bien entendu tous les nouveaux savoirs ne seront pas nécessairement « construits par les élèves ». **Des apports de type plus transmissif peuvent être faits par le professeur**. Toutefois, dans une telle pratique, il est tout aussi indispensable de mettre chaque élève en activité en lui ménageant de vrais temps de réflexion mathématique. Tout élève doit être confronté à des questions du genre : « À quoi va servir ce que je viens de vous montrer ? » ; « À quoi vous fait penser cette situation ? » ; « Pourquoi peut-on faire appel à tel ou tel savoir antérieur ? » ; « Essayez de mener le début de ce calcul » …

Exemple : voir en annexe 2 un mode d'introduction de la propriété de Pythagore qui ne propose pas d'approche expérimentale.

> *Pour autant il est important,* ***pour gérer la double exigence du programme et du socle commun,*** *de continuer à* ***valoriser des approches empiriques.***

En effet progressivement, au cours de leur formation, les élèves prennent conscience que les mathématiques permettent de réaliser un certain nombre de tâches sans avoir à « tâtonner ». À côté de cela, ils sont aussi convaincus, sans avoir toujours l'occasion ou la permission de le dire, que des méthodes empiriques permettent d'obtenir des résultats très satisfaisants en pratique. Par exemple, on peut voir des élèves déterminer le centre d'un cercle dans une excellente approximation, sans recourir au tracé des médiatrices. Le professeur de mathématiques perd souvent en crédibilité s'il ne fait aucune place à ces approches empiriques qui sont communément reconnues comme efficaces dans la vie courante (pour trouver le centre d'un disque en papier, on peut le plier en quatre, par exemple).

Au contraire, en amenant les élèves à comparer les deux types d'approche, il est possible de :
- valoriser des aptitudes qui relèvent du socle,
- montrer les limites de la résolution empirique (tout en lui reconnaissant une efficacité),
- plaider plus honnêtement et plus efficacement pour des méthodes mathématiques rigoureuses.

Par exemple, quand des élèves de 5^{e} doivent réaliser un patron d'un cylindre de révolution de 3 cm de rayon et 5 cm de hauteur, le premier obstacle à franchir est la détermination de la forme du patron. Il faut ensuite faire en sorte que le rectangle ait une longueur adéquate. Dans ce type de travail, on voit bon nombre d'élèves (s'ils y sont autorisés habituellement) découper et rouler du papier pour ajuster leur première conjecture et trouver, au brouillon, une forme globale pertinente. Ils se lancent alors dans une construction au propre pour découvrir finalement le problème de la longueur du rectangle. Certains reprennent alors un brouillon pour faire des calculs tandis que d'autres ajustent avec leurs ciseaux.

Toute cette approche empirique aura permis aux premiers d'aboutir, aux autres de prendre conscience du problème pour se préparer à la suite. Quand les deux types d'élèves s'expliqueront en plénière, un des enjeux sera la comparaison des méthodes. Les deux auront bien en main un cylindre en papier mais le premier pourra dire que, pour un prochain patron, il est certain de réussir du premier coup, sans aucun ajustement.

b) Des problèmes pour réinvestir les connaissances acquises

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de veiller à ce que ***les problèmes proposés*** dans ce cadre offrent ***une vraie activité mathématique à tout élève, y compris à celui qui ne maîtrisera peut-être pas une résolution complète.***

Pour cela, il est nécessaire d'ouvrir les questions posées aux élèves.
Une façon de procéder, assez communément partagée, consiste à proposer des situations dont l'énoncé est suffisamment détaillé pour permettre à tout élève d'amorcer le travail.

L'énoncé ci-dessous (extrait du DNB 2007) illustre cette façon d'envisager les choses.

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. • Écrire le résultat	1. On note x le nombre choisi. Exprimer en fonction de x le résultat de ce programme de calcul. 2. Démontrer qu'une autre écriture de $(x+4)\times x+4$ est $(x+4)^2$. 3. Lorsque l'on applique ce programme de calcul à un nombre entier, obtient-on toujours le carré d'un nombre entier ? 4. a. Résoudre l'équation $(x+2)^2=1$. b. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Dans une telle version, les indications sont données dans le but d'aider les élèves à démarrer. Mais comme ces indications induisent une stratégie de résolution experte hors de portée de certains élèves (« passer à l'algèbre », « transformer des expressions du second degré », « résoudre des équations » ne sont pas des exigibles du socle commun), elles ont souvent pour effet de priver totalement les élèves en difficulté de toute activité mathématique. Elles ôtent aussi aux bons élèves la possibilité de faire preuve d'initiative et de passer de façon autonome à l'algèbre, seul moyen dans cette situation d'accéder à la preuve.

Au contraire, ***ouvrir le questionnement favorise l'activité de chacun en augmentant la palette des stratégies accessibles.***

Voici une autre version du problème précédent ***à proposer en formation*** :

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. Écrire le résultat.	*Seule question posée dans un premier temps :* Tester ce programme de calcul sur quelques nombres entiers. *Laisser les élèves faire des constats, proposer des conjectures, se poser la question de sa généralité.* *Éventuellement relancer une recherche par une seconde question :* On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Extraits de réponses d'élèves :

Je choisis le nombre 3 :
$3+4=7$
$7\times3=21$
$21+4=25$

le résultat du programme de calcul avec 3 est 5^2 ou
Je choisis le nombre 22 :
$22+4=26$
$26\times22=572$
$572+4=576$
le résultat du programme de calcul avec 22 est 24^2.

b) Oui, lorsque l'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul, on obtient toujours le nombre choisi +2 au carré. le tout

Si le problème est énoncé sous une forme ouverte, tout élève a la possibilité de mettre en œuvre des capacités élémentaires de calcul, d'observer les résultats obtenus, d'émettre une conjecture, de faire la part entre ce dont on est sûr et ce qu'il faut prouver (quelques essais constituent-ils une preuve ?), d'élaborer une démarche par essais-erreurs, autant de capacités exigibles du socle commun.
Certains parviendront peut-être, comme l'extrait ci-dessus le montre, à formaliser un autre programme de calculs, plus court que le premier, qui donne toujours le même résultat que le premier, quel que soit le nombre auquel on applique ces deux programmes. Ils auront pu ainsi passer de façon autonome à l'abstraction.

Mais sans doute faudra-t-il accepter que certains élèves n'accèdent pas seuls à la stratégie de preuve, ce qui n'est pas grave dans la mesure où chacun a eu la possibilité d'avancer relativement à ses propres apprentissages et de construire des capacités attendues dans le cadre du socle commun. En outre, le travail d'exploration personnelle de la situation les a préparés à s'intéresser, au moment de la synthèse, aux preuves qui seront proposées par d'autres et à, peut-être, en tirer profit dans une expérience future.

> *Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est important de valoriser différents niveaux de production.* ***En outre, permettre la coexistence de plusieurs niveaux de production au cours d'un travail, et même en garder la trace, est souvent très enrichissant pour la suite de la formation.***

Exemple en classe de cinquième : « Des programmes de calcul qu'on ne peut pas remonter. »

Deux exercices que l'on peut donner dès le début de l'année :

> Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre.
>
> Tripler
> Ajouter 4
> Doubler
> Retirer 4
>
> 1) Appliquer le programme au nombre 5.
> 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 809,2 ?
> 3) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 14 ?

À la question 2), on obtient en général trois types de production : des essais-erreurs un peu anarchiques ; des essais-erreurs très organisés (par dichotomie) ; des « remontées de programme » qui s'appuient sur le sens des opérations.
Lors de la plénière qui clôture ce premier travail, il est essentiel de valider les deux dernières méthodes, même si la « remontée de programme » apparaît plus économique. L'exposé de cette dernière permet à tous de retravailler sur le sens des opérations au niveau du socle. Mais, bien que reconnue par les élèves comme plus longue, la méthode par essais-erreurs mérite aussi d'être étudiée car elle a de l'avenir dans la classe.
En effet, à la question 3), la méthode par essais-erreurs n'est plus efficace puisque la solution n'est plus décimale. Toutefois elle retrouvera plus tard tout son intérêt, par exemple dans l'exercice suivant :

> Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre.
>
> Doubler
> Ajouter 3
> Multiplier par 3
> Ajouter le nombre de départ
>
> 1) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 25,1 ?
> 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 34 ?

Cette fois-ci, il n'est plus possible de « remonter le programme ». Si la méthode par essais-erreurs a bien été valorisée précédemment, les élèves pourront y avoir recours et répondre de façon exacte à la première question. Avec cette méthode, ils pourront aussi donner une solution approchée à la seconde question, même s'ils ne sont pas capables de recourir au calcul littéral pour aboutir complètement.
On pourra ainsi travailler avec tous sur un problème qui mènera certains seulement jusqu'à une modélisation algébrique.

c) Résoudre un problème, c'est raisonner puis communiquer

Apprendre à résoudre des problèmes, c'est d'abord et essentiellement ***apprendre à raisonner***. C'est bien en ayant très régulièrement des occasions de raisonner que tout élève parviendra à construire des compétences élaborées telles que « être capable d'identifier quand une situation se prête à un traitement mathématique et élaborer une stratégie pour y répondre » , capacités exigibles dans le cadre du socle commun.

Il est donc essentiel de solliciter, autant que faire se peut, la capacité à raisonner de chaque élève. Les problèmes dits « de recherche » sont tout à fait essentiels pour la développer. Cependant, ils n'occupent qu'un temps limité dans les apprentissages. Il est indispensable de permettre à l'élève d'exercer plus quotidiennement sa capacité à raisonner et de nombreuses occasions peuvent se présenter à chaque séance.

Un calcul réfléchi peut être l'occasion d'un véritable raisonnement.
Par exemple, dès la sixième, un élève qui doit calculer mentalement le produit $4\times1{,}75$ peut :

- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 1 unité et 3 quarts d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, transformer 12 quarts d'unité en cherchant, puisqu'il sait que 4 quarts d'unité font une unité, le nombre de fois 4 dans 12 et finir en ajoutant 4 unités et 3 unités.
- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 2 unités moins 1 quart d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puis la vision fraction (4 quarts d'unité font une unité) et finir en soustrayant 1 unité à 8 unités.
- choisir d'effectuer deux multiplications successives par 2.

Dans tous les cas, l'intelligence du calcul est montrée. Dans ce contexte, en donnant le résultat puis en exprimant son raisonnement à l'oral, l'élève peut montrer, sans passage à l'écrit, qu'il a identifié le problème et a élaboré une stratégie pour le résoudre : le contrat est parfaitement rempli.

Outre le fait qu'un calcul réfléchi est pour tout élève une excellente occasion de raisonner, ***maîtriser la culture mathématique nécessaire au citoyen impose de façon très prioritaire la maîtrise du sens des opérations et du calcul*** (réfléchi c'est-à-dire calcul mental automatisé ou non ou bien instrumenté avec calculatrice ou tableur).
L'aptitude au croisement des différentes techniques de calcul, en particulier pour l'évaluation d'ordres de grandeurs, est essentielle dans la vie courante. Mais contrairement à l'attendu du citoyen de la société des années avant 1970, ***la priorité n'est plus la maîtrise du calcul posé.***

Apprendre à résoudre un problème c'est aussi ***apprendre à communiquer son raisonnement***, communication qui peut se faire par écrit mais aussi par oral. Apprendre à rédiger un raisonnement est bien un objectif de formation du programme mais ***la mise en forme écrite d'un raisonnement ne fait pas partie des exigibles du socle commun*** (voir l'en-tête des programmes).

Pour donner au raisonnement la place qu'il mérite il est essentiel de :

- ***dissocier les deux apprentissages*** (recherche et élaboration d'un raisonnement ou d'une preuve ; mise en forme du raisonnement ou de la preuve) car beaucoup d'élèves se croient incapables de faire des mathématiques alors que leur difficulté réside plutôt dans le fait de devoir produire un écrit conforme aux attendus du professeur. D'autres sont dans l'incapacité de montrer qu'ils raisonnent bien parce que l'évaluation d'un raisonnement passe le plus souvent par l'évaluation d'un écrit.
- ***valoriser toute expression écrite correcte d'un raisonnement.***

Exemple : voir en annexe 3 quelques productions d'élèves.

- **développer les échanges oraux et écrits entre les élèves.**

Quand le professeur est le seul interlocuteur de l'élève dans un jeu de questions-réponses, l'élève peut difficilement se sentir en réelle situation d'argumentation. En effet, il sait très bien que le professeur connaît à l'avance les réponses aux questions qu'il pose et qu'il est capable de comprendre à mi-mot ce que disent les élèves. Dans ces circonstances, la motivation à plaider pour convaincre et à formuler son point de vue le plus clairement possible risque d'être minimale.
Au contraire, favoriser les échanges oraux et écrits entre élèves permet de les mettre plus facilement en véritable situation de communication. Les réactions des pairs poussent bien davantage l'élève à affiner ses arguments pour convaincre et à soigner ses formulations pour être compris des autres. Chaque objection d'un camarade est un défi qui mène souvent à développer une exigence plus grande dans les domaines du raisonnement et de la formulation.

Les échanges entre élèves peuvent se développer à l'oral comme à l'écrit. Bien des protocoles sont possibles. Par deux, ils peuvent échanger leurs productions écrites, annoter en donnant leur point de vue et renvoyer à l'auteur. En petits groupes de trois ou quatre, après une recherche individuelle, ils peuvent se mettre d'accord pour produire une argumentation collective.
Il est possible en classe entière d'animer des débats autour de l'examen de productions individuelles choisies ou de travaux de groupes, chaque élève pouvant dire ce qu'il ne comprend pas, les précisions qui manquent pour que l'écrit soit parfaitement clair, excellente ***façon de présenter aux élèves le travail de rédaction comme l'élaboration d'un écrit de communication se devant d'être compréhensible par tous ceux qui ont les mêmes savoirs***.

d) Résoudre un problème c'est aussi maîtriser des techniques

Un élève ne peut s'engager dans une résolution de problème s'il est freiné en permanence par des obstacles techniques. Développer et entretenir les automatismes en mathématiques, c'est donner à tout élève des outils fiables nécessaires pour être autonome dans la résolution de problèmes, c'est aussi libérer sa mémoire de travail et lui donner la possibilité d'exercer plus librement sa créativité.
En calcul, la maîtrise des quatre opérations, la connaissance de procédures de calcul mental rapides et efficaces, une bonne mémorisation des tables de multiplication sont nécessaires à la résolution de problèmes.
En géométrie, la mémorisation des propriétés de quelques figures de base (carré, losange,…) et une bonne habileté de construction de ces figures (à main levée, avec des instruments de dessin ou des logiciels de construction dynamique) facilitent la reconnaissance de figures de base dans une configuration donnée.

L'objectif de toute activité mathématique est bien la résolution de problèmes mais cet objectif ne peut être atteint sans un passage par un travail de « gammes », prélude à la mémorisation et à l'acquisition des automatismes indispensables. Ces automatismes, nécessaires à la résolution de problèmes s'acquièrent, s'affirment, s'entretiennent en effet par la pratique d'exercices référés à des tâches simples : calculs isolés, récitation de résultats mémorisés, construction de figures de base, …
Néanmoins, ce travail des automatismes, conduit dans une classe où il faut gérer la tension entre les objectifs du programme et la nécessité de l'acquisition du socle commun pour tous, ne saurait se réduire à une multiplication d'exercices techniques imposés à tous les élèves. Imaginer qu'une stratégie de calcul assimilée grâce à trois exercices techniques d'application par une majorité d'élèves puisse être finalement assimilée par les autres grâce à la répétition des mêmes exercices qui se sont révélés à un moment donné inefficaces pour eux est illusoire.
Adopter une pédagogie du détour est souvent beaucoup plus efficace et procéder ainsi peut prendre des formes très diverses.
Par exemple :

- Revenir souvent et par petites touches sur un entraînement.
- Aider les élèves à prendre conscience que c'est parce qu'ils maîtrisent mal telle ou telle technique qu'ils sont freinés à un moment donné dans telle résolution de problème est une bonne motivation pour lancer un entraînement (collectif ou individualisé, en classe ou à la maison) et donner, à cet entraînement aussi, du sens dans l'apprentissage. Un élève qui a compris que pour résoudre des problèmes, il faut savoir raisonner, mais aussi maîtriser des techniques, puis enfin communiquer ne verra sans doute plus l'entraînement technique comme une simple corvée. On peut par exemple dire aux élèves : « Aujourd'hui, vous avez été arrêtés dans votre recherche parce que vous ne saviez pas bien faire ceci ou cela : je vous propose un entraînement… » ou « Tu as vu, tu es coincé là parce que tu ne sais pas bien faire ceci ou cela : je te propose de t'entraîner avec tel exercice ».
- Dans un souci de saisir toute occasion de solliciter une maîtrise technique et donc de faire acquérir des automatismes, on peut être tenté lors d'une résolution de problème en classe d'interdire l'usage de la calculatrice. Il peut se révéler plus efficace vis à vis de certains élèves de ne pas mélanger les deux objectifs. Dédouaner parfois les élèves d'une technique en leur

permettant l'usage de la calculatrice peut permettre à tous de se centrer sur le problème. On reviendra sur la technique qui a fait défaut mais à un autre moment et en évitant tout acharnement.

- Inciter les élèves à mettre en place des éléments de contrôle pour s'auto-valider. Ce peut être, par exemple, le test d'égalité dans un calcul littéral, un calcul approché pour vérifier un calcul exact, une mesure pour contrôler une démonstration en géométrie.

e) Résoudre des problèmes, à la maison aussi !

Quand le professeur donne des problèmes à résoudre à la maison, il se heurte souvent à des difficultés : des élèves rendent une copie presque blanche en affirmant qu'ils n'ont pas compris, d'autres recopient la solution d'un camarade, d'autres encore rendent des travaux de qualité si médiocre que leurs erreurs sont difficiles à exploiter. On peut alors avoir parfois la tentation de réduire ses exigences en renonçant aux problèmes au profit d'un entraînement technique ou en réduisant ce travail à la rédaction de solutions de problèmes cherchés en classe. Entraînement technique et travail de rédaction sont bien sûr deux tâches qui doivent trouver toute leur place dans le travail fait à la maison et à rendre sur feuille. Mais, il ne faut pas pour autant renoncer aux bénéfices d'un travail de recherche en temps non limité. Il est en effet possible de trouver des moyens d'accompagner les élèves dans leur recherche à la maison.

Comment accompagner les élèves dans la résolution de problèmes à la maison ?
Voir en annexe 4 un exemple de protocole d'alternance maison-classe.

2. Quelles stratégies pédagogiques pour favoriser l'activité mathématique de tout élève à tout moment ?

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de respecter autant que faire se peut le rythme de chaque élève. Cela impose de laisser un temps suffisant à certains sans pour autant freiner les autres. Cela impose aussi de revenir souvent et par petites touches sur une notion afin de proposer souvent, d'éviter d'imposer et de laisser du temps au temps.
Pour autant la cohésion du groupe-classe reste fondamentale dans les apprentissages. ***Une différenciation réussie est une différenciation qui permet de maintenir le groupe-classe dans un même projet global.***

Il est possible d'y arriver, sans faire preuve de virtuosité pédagogique ou didactique, tout simplement en identifiant et en adoptant quelques gestes professionnels simples qui ont fait leur preuve et qui ne nécessitent qu'une solide organisation.

a) Quelques exemples de différenciation pédagogique

- ***Jouer sur les paramètres didactiques.***

Pour ne pas marginaliser certains élèves relativement à l'acquisition du programme, il est essentiel de proposer très régulièrement des situations d'apprentissage visant les mêmes objectifs de formation pour tous. Par exemple, en classe de sixième ou de cinquième, le puzzle de Brousseau ou sa variante proposée par R. Charnay offre une situation d'apprentissage permettant très efficacement de faire identifier aux élèves qu'agrandir chacune des pièces du puzzle ne revient pas à ajouter le même nombre à toutes les mesures mais à multiplier toutes les mesures par un même nombre. Toutefois, il est possible en jouant sur les données du problème de différencier l'exigence requise au niveau de la maîtrise technique. Proposer à certains élèves des agrandissements du type « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi » ne nécessite pas le même degré de maîtrise au niveau des nombres. Le fait que les uns aient un coefficient d'agrandissement entier ou décimal, alors que les autres ont un coefficient d'agrandissement non décimal, ne nuit pas à l'objectif principal de formation tout en permettant de tenir compte de la maîtrise ou non de la notion de quotient.

À d'autres moments, modifier les paramètres didactiques d'un problème peut faciliter pour les uns la mise en œuvre de stratégie personnelle, inciter les autres à mettre en œuvre une stratégie experte.

❖ *Prévoir des questions « défi »*

Le temps nécessaire à la résolution d'un problème est très variable d'un élève à l'autre. Or la gestion de la classe devient vite très compliquée quand la moitié des élèves n'ont pas achevé le travail de recherche à fournir sur les situations considérées comme incontournables tandis que l'autre moitié a déjà terminé les résolutions attendues et s'impatiente. Classiquement, on demande alors aux plus rapides de rédiger soigneusement leurs résolutions, on leur propose d'aider les autres ou encore on leur donne trois exercices du livre. Toutes ces solutions, qui ne se résument pas à permettre aux plus rapides d'avancer plus vite dans ce qui *in fine* sera attendu de tous (ce qui ne ferait qu'augmenter les écarts entre les élèves), peuvent bien sûr être mises en œuvre avec profit. Une autre pratique efficace consiste à exploiter ces temps pour permettre aux élèves les plus à l'aise de se confronter à des questions « défi » qui ne seront pas proposées à tous et sur lesquelles il n'y aura pas mise en commun.

Par exemple, en quatrième, on propose à chaque élève de résoudre les trois problèmes suivants :

Des histoires d'héritage …

1) Hélène hérite des deux septièmes de la fortune de sa tante qui s'élève à 56 000 €.
   Quelle somme d'argent reçoit Hélène ?

2) Pierre, Julie et Christine se partagent la fortune de leur père.
   Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Julie les deux cinquièmes et Christine hérite du reste.
   Quelle fraction de la fortune de son père représente la part de Christine ?

3) Jean hérite des cinq septièmes de la fortune de sa grand-mère : il reçoit 20 000 €.
   À combien s'élève la fortune de sa grand-mère ?

Ces trois problèmes sont les trois versions possibles d'un problème de changement d'états. Dans le premier, l'état initial et le mode de changement d'état sont donnés. Dans le second, il s'agit de trouver le mode de changement d'état. Dans le troisième, le mode de changement d'état et l'état final sont connus. Un élève qui a bien travaillé ces trois problèmes a eu un temps d'apprentissage pertinent.
Il est possible de proposer à ceux qui ont résolu ces trois problèmes de chercher le suivant. Ce problème mobilise les mêmes savoirs mais sa résolution nécessite une maîtrise plus grande.

4) Georges, Michel et Claude se partagent la fortune de leur oncle.
   Georges reçoit les sept neuvièmes de la somme totale et Michel le sixième.
   La part de Claude est de 5 000 €.
   À combien s'élève la fortune de l'oncle ?

Pour les plus rapides on peut encore proposer la résolution du problème suivant :

5) Une enquête sur l'apprentissage de l'allemand et de l'anglais chez les élèves de quatrième fait ressortir que : - cinq douzièmes des élèves interrogés n'apprennent pas l'allemand ; - 500 élèves apprennent à la fois l'allemand et l'anglais ; - un quart des élèves interrogés n'apprennent pas l'anglais ; - un douzième des élèves interrogés n'apprennent ni l'allemand ni l'anglais. Combien d'élèves ont été interrogés au cours de cette enquête ?

L'objectif étant de rester toujours disponible pour aider les élèves en difficulté, il est important de prévoir une aide écrite que l'on peut donner à des élèves rapides au cas où leur problème résiste trop.

Si, en cours de séance, on souhaite faire une mise en commun sur l'un ou l'autre des trois premiers problèmes, il va de soi que tous les élèves prennent part au débat. On peut aussi, à l'issue de la séance, choisir de demander aux uns de rédiger, à la maison, les solutions des trois premiers problèmes, aux autres celle du quatrième et enfin aux plus rapides celle du cinquième. La synthèse collective qui aura lieu la séance suivante ne portera bien sûr que sur les trois premiers problèmes. Les annotations du professeur seront donc plus importantes pour le 4) et le 5).

Quand on pratique une telle différenciation, il est bon de la présenter à la classe pour lui donner du sens. Il faut, en effet, éviter qu'elle soit ressentie comme porteuse de ségrégation : le professeur peut expliquer que ce protocole permet à chacun de travailler à son rythme et le rend, lui, plus disponible pour les élèves en difficulté.

On peut aussi parfois faire en sorte que les questions « défi » posées à certains soient quand même l'occasion d'une mise en commun collective, ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe (voir un exemple en annexe 5).
La force de cet exemple par rapport au premier est de maintenir davantage le groupe-classe dans un même projet global tout en faisant travailler chacun à sa mesure.

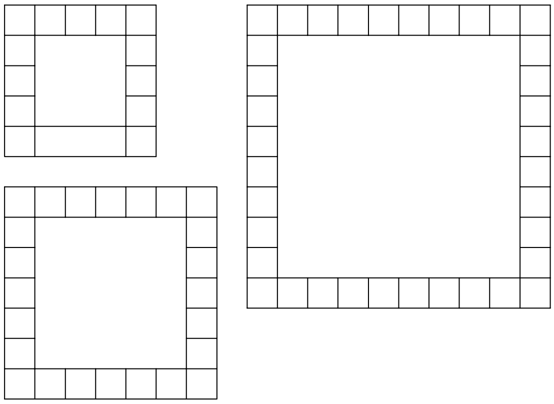
Dans les deux exemples présentés en annexe, ***les élèves en difficulté ont un vrai temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle »***[3].

❖ ***Différencier les attendus ou exigences***

Proposer des problèmes, sans induire *a priori* de réponse experte, permet souvent la coexistence de plusieurs niveaux ou plusieurs formes de réponses. Ce type de différenciation ne demande pas de protocoles ou de préparations très compliquées puisque tous les élèves travaillent au même moment sur la même tâche. Il s'agit simplement d'ouvrir le questionnement pour que chacun soit capable, d'une manière ou d'une autre, de remplir le contrat et de sentir qu'il a comblé les attentes.

[3] Voir Annexe 5.

Par exemple, ce sera possible dans l'exercice de dénombrement ci-dessous, parce que les attentes sont d'emblée différenciées :

> Pierre joue avec des mosaïques de couleur.
> Il dispose ses mosaïques pour obtenir des « carrés ».
>
> 
>
> Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.
> Pouvez-vous l'aider ?

Dans l'énoncé, on ne dit pas « Appelons *n* le nombre de mosaïques sur un côté. Établir une formule qui donne le nombre de mosaïques sur un carré de côté *n* ». On attend, en effet, que certains utilisent une méthode discursive, que d'autres élaborent un modèle algébrique et que d'autres encore utilisent toutes sortes de formes intermédiaires.

Voici quelques productions d'élèves :

1.

On prend le nombre des mosaiques d'un côte, puis on le multiple par 4 (car il y a 4 côtes égaux dans un carré) puis on enlève 4 à cause des angles droits.

2.

(nombre de carreaux par côté x 4) - 4 = nombre de carreaux dont on aura besoins pour faire les côté

exemple : 40 carreaux de côte =
(40 x 4) - 4 = 156
Il aura besoine de 156 pour faire les 4 côtes

Explication : les 4 côtes du carrés.
(40 x 4) - 4 = 156 nombre de carreau dont ils auront besoins
nombre de carreau par côté
les carreaux comptés plusieurs fois.

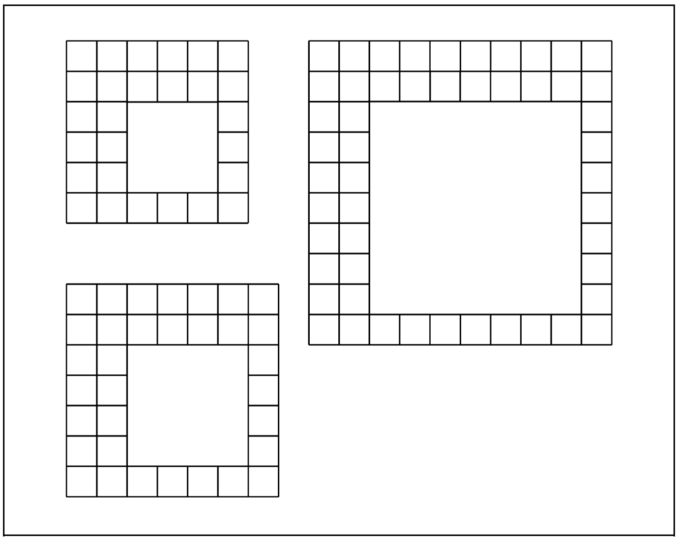
3.

A = nombre de carreaux par coter

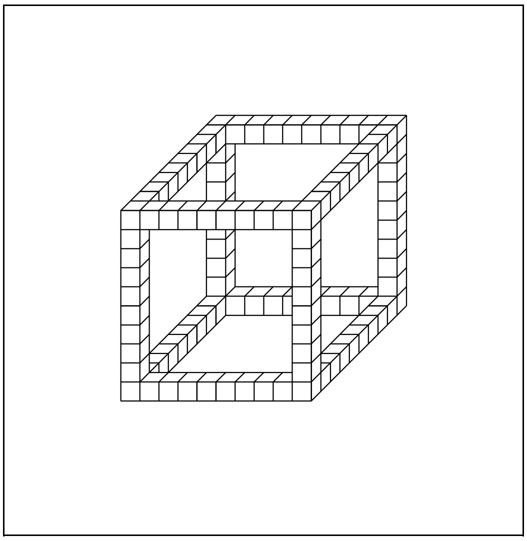
Ax4-4 = nombre total de carreaux sur les coter

ex. 40x4-4 = 36

Lors de la phase de synthèse, le professeur peut convenir que les trois productions sont bien la preuve que le contrat est rempli. La différenciation possible des attentes fait qu'à ce stade, tous les élèves sont en réussite. Pour autant, la classe n'en reste pas à ce constat. En effet, la comparaison des différents types de productions est un des éléments moteurs de l'apprentissage. Elle va enrichir les représentations de chacun et provoquer de l'émulation. La simultanéité de ces productions de natures différentes s'avère souvent extrêmement formatrice pour tous. On peut le mesurer, en proposant, à distance, une situation analogue :



ou



On constate alors que chacun a pioché dans les idées des autres pour faire évoluer sa seconde production : ceux qui avaient produit du discours la première fois proposent des embryons de formules, ceux qui avaient des pseudo-formules formalisent mieux, …

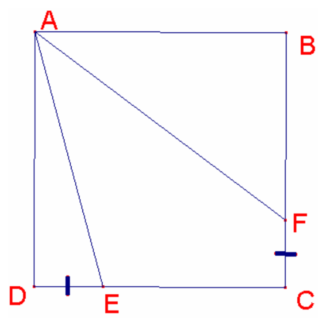
❖ ***Gérer des états d'avancement divers dans la réalisation d'une tâche complexe***

Gérer la double exigence du programme et du socle commun, maintenir la cohésion du groupe classe, faire acquérir solidement à tous les attendus du socle commun nécessitent de confronter régulièrement tous les élèves à des tâches complexes. Il faut alors prévoir des protocoles permettant de gérer des états d'avancement divers dans la réalisation de cette tâche complexe.

Toutefois faire vivre en classe une recherche de problème ouvert surtout si cette recherche nécessite de s'inscrire dans une certaine durée (une séance par exemple), ***peut générer des problèmes de gestion de classe*** qu'il est préférable d'anticiper.

Par exemple, imaginons de poser le problème suivant dans une classe de troisième.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm.
Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre.
Construis le point F du segment [BC] tel que DE = FC.
Calcule l'aire du quadrilatère AECF.
Compare ton résultat avec celui de ton voisin.
Quelle conjecture peux-tu faire ?
Démontre cette conjecture.



Il ne va pas falloir beaucoup de temps à certains élèves pour faire la figure, calculer l'aire du quadrilatère, constater qu'ils obtiennent 50, comme d'autres camarades aussi rapides qu'eux, et se lancer dans l'élaboration d'une stratégie permettant de prouver que cette aire est bien toujours égale à 50

(stratégie qui peut se révéler être un passage à l'algèbre ou une comparaison des aires de deux triangles tels que AFC et ADE ou ….).
Pendant ce même laps de temps, certains élèves n'auront peut-être eu que la possibilité de faire la figure, de constater que AECF n'est pas une figure géométrique classique et qu'en conséquence aucune formule connue n'est opérante pour donner immédiatement cette aire.
Dans une première confrontation des productions individuelles, si on n'y prend pas garde, les premiers peuvent très vite enlever toute occasion aux seconds de revisiter des notions fondamentales exigibles dans le cadre du socle commun (aire d'un triangle rectangle, sens des opérations, calculs), d'élaborer un raisonnement (comment calculer l'aire de ce polygone ?), de construire des aptitudes importantes telles que faire preuve de logique et de rigueur et donc distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver.
En effet, dans une classe, les réponses se propagent vite et si certains élèves savent comment calculer l'aire du quadrilatère et sont persuadés que cette aire est toujours égale à 50, ils risquent fort d'aider leurs camarades de la pire façon à savoir en leur donnant simplement les réponses : « pour calculer l'aire tu fais comme ceci », « mais si, cette aire elle fait toujours 50 », « tu n'as qu'à poser $DE = x$ » !

Obtenir que les bons élèves ne « mangent pas » les problèmes des plus lents, faire en sorte que tous les élèves s'impliquent dans une recherche, qu'ils aient véritablement le temps d'avancer sur leurs difficultés, sans que pour autant les plus rapides ne soient freinés dans leur activité, cela nécessite un peu d'anticipation et d'organisation.

Un exemple d'organisation possible :
On peut, dans un premier temps, éviter de donner le problème dans toute sa globalité. Si la question de la généralité n'est pas posée d'emblée, les élèves plus rapides risquent moins de bousculer les autres. En outre, il est tout à fait formateur de permettre aux élèves de poser eux-mêmes la question de la généralité.

Temps n° 1 : travail proposé aux élèves à la maison.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm. Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre. Construis le point F du segment [BC] tel que DE = FC. Explique comment tu ferais pour calculer l'aire du quadrilatère AECF.

Temps n° 2 : mise en commun des difficultés rencontrées.
Les élèves sont invités à dire ce qui leur a posé problème par petits groupes ou en plénière. Les autres fournissent des aides pour trouver tout seul et surtout pas la réponse (avec l'habitude, les élèves savent de mieux en mieux trouver les aides adéquates, sans dévoiler la solution : ce travail est aussi très formateur). Le professeur n'intervient qu'en dernier lieu.

Temps n° 3 : travail à la maison.
Les élèves qui n'ont pas réussi la première fois reprennent le travail à la maison pour un autre nombre.

Temps n° 4 : mise en commun.
Une conjecture a peut-être déjà été exprimée en aparté par quelques élèves. La question de la généralité est enfin posée collectivement. Il convient d'accepter que certains élèves ne parviennent pas seuls à la preuve.

b) Une progression spiralée pour donner du temps à tous

L'organisation en spirale de la progression était déjà recommandée dans les programmes mais l'apparition du socle commun en renforce notablement les avantages.

1. *Elle permet de gérer la priorité à donner aux aptitudes du socle sur celles du programme qui sont hors socle.* Une progression spiralée offre sur chaque thème des approfondissements successifs proposés à plusieurs reprises durant l'année. Le premier épisode de travail sur un thème donné peut viser en priorité les aptitudes du socle et réserver pour la suite les autres objectifs fixés par le programme sur ce thème. Une telle organisation appliquée à différents thèmes garantit la construction des aptitudes du socle dans le travail de l'année.
2. *Elle permet de mettre en place une évaluation, voire une validation, des aptitudes respectant les rythmes d'apprentissage individuels des élèves.* En multipliant les réinvestissements sur différents thèmes, elle favorise l'entretien et la consolidation dans la durée des aptitudes acquises. Mais elle permet aussi de multiplier et de renouveler au fil du temps les occasions d'évaluation d'aptitudes que certains élèves mettent plus de temps que d'autres à construire.

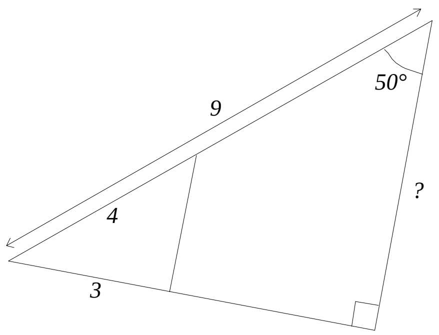
Quelques manifestations d'une progression en spirale.

❖ ***L'entraînement au quotidien, à petites touches.***

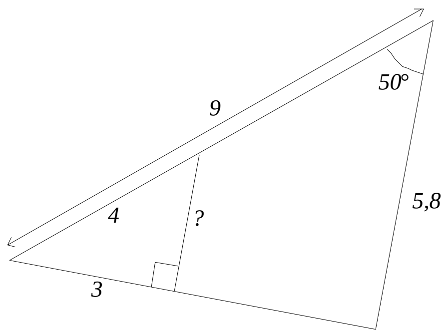
Une préconisation forte consiste à proposer, lors de toute séance, un temps consacré à des activités rapides. Une telle pratique permet de traiter certaines notions dans la durée (sans y consacrer au total plus de temps) ce qui facilite aussi une mobilisation fréquente de ces notions.
Exemple : quelques « activités mentales ».

Par exemple, pour poursuivre l'apprentissage de théorèmes de géométrie en entraînant tous les élèves à reconnaître leur champ d'application et à les utiliser en acte, on peut proposer, au début de plusieurs séances, éventuellement espacées :

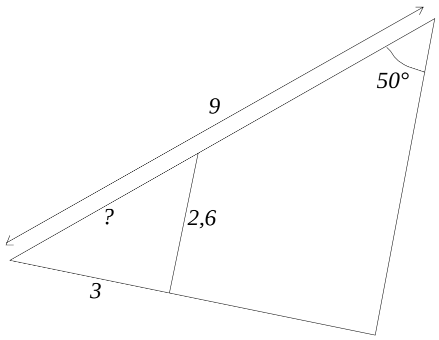
Jour 1



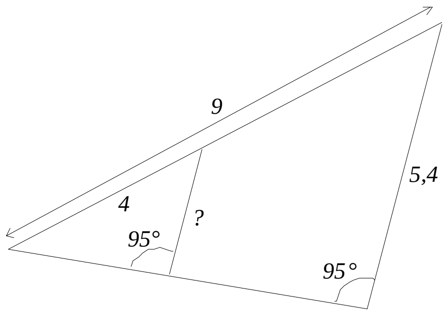
Jour 2



Jour 3



Jour 4



Chaque activité se mène en deux temps brefs.
Temps 1 : comment calculer la longueur demandée (trois outils sont disponibles : Pythagore, Thalès, le cosinus) ?
Mise en commun argumentée.

Temps 2 : faire le calcul à 0,1 près.

Pour ces activités rapides, aucune rédaction n'est demandée. Les élèves produisent un résultat sur leur cahier de recherche. La correction est orale avec sollicitation des élèves (Untel ? Qui n'est pas d'accord ? Pourquoi ? Qui a fait autrement ? Qui peut redire comment ça marche ?) ou alors très magistrale, juste pour entraîner et entretenir un apprentissage, le professeur redonne éventuellement des conseils.

Ces activités rapides peuvent aussi être l'occasion d'une évaluation formative pour le professeur et formatrice pour les élèves.
Par exemple, lorsque les élèves viennent d'apprendre à additionner deux nombres décimaux relatifs en 5e (voir annexe 6), chaque jour en début d'heure, avant de faire un autre travail – à caractère géométrique – on peut proposer :

• **Jour 1 :** cinq sommes de deux termes.
Les élèves se notent pour eux-mêmes. Ils mesurent ainsi l'avancée de leurs apprentissages et le professeur peut engager, anonymement, ceux qui ont moins de 4/5 à s'entraîner à la maison.

• **Jour 2 :** cinq sommes de deux termes.
Les élèves se notent à nouveau. Le professeur fait un sondage en comptant le nombre de notes supérieures ou égales à 4. Il réalise ainsi, en deux minutes une évaluation formative indispensable pour son pilotage. Là encore, il engage les élèves en difficulté à un travail personnel. Il peut aussi demander qui pense avoir progressé du jour 1 au jour 2 : c'est une façon de reconnaître les avancées des élèves et d'encourager les plus en difficulté à poursuivre leurs efforts à la maison.

• **Jour 3 :** des sommes à trous.
C'est encore l'occasion d'un entraînement pour l'addition, mais aussi une préparation pour l'apprentissage futur de la soustraction.

• **Jour 4 :** deux sommes de cinq termes avec des opposés.

❖ *Différer la phase d'institutionnalisation*

Institutionnaliser trop tôt a souvent pour effet de donner l'impression à l'élève qu'il s'agit ensuite d'appliquer une recette. Il faut en effet beaucoup se méfier des recettes, car une recette n'est pas pour un élève le moyen de comprendre plus vite. Cela devrait rester pour tout élève le moyen d'aller plus vite une fois qu'il a compris.
De plus, un objectif majeur consiste à mettre à tout moment tout élève en activité mathématique, alors qu'appliquer une technique non comprise ne peut être considéré comme une activité mathématique.

Voir en annexe 6 un exemple de protocole d'enseignement pour introduire l'addition de deux nombres relatifs en 5e.

❖ *Le principe du « fil rouge » pour quelques concepts importants*

Exemple : la proportionnalité – pas de « chapitre » mais des « temps autour de la proportionnalité » en multipliant les occasions de travail sur ce thème.

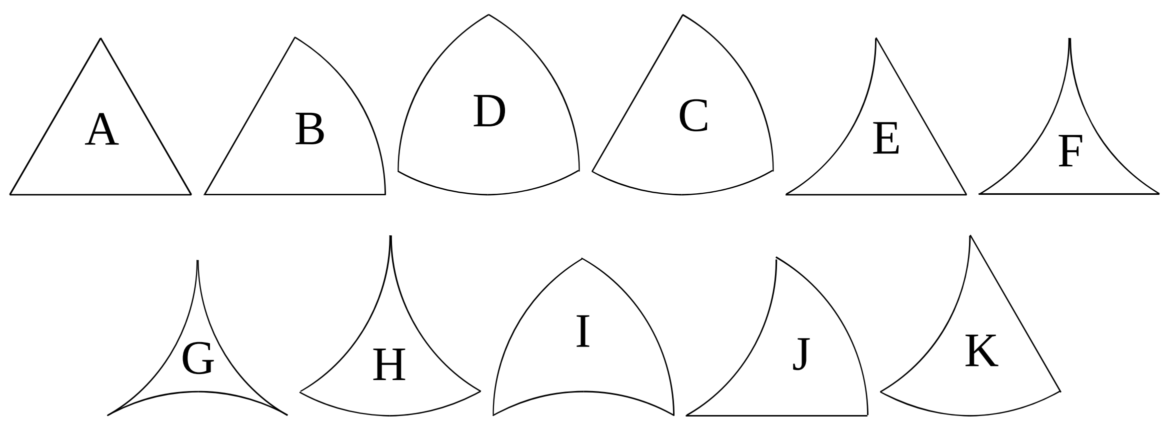
❖ *Préparer les apprentissages (évaluation diagnostique)*

Tout nouvel apprentissage nécessite que les élèves disposent d'un certain nombre d'acquis préalables. Quand le professeur fait travailler les élèves pour construire un nouveau savoir, si certains ne maîtrisent pas ces acquis nécessaires pour avancer, ils se heurtent à des obstacles qui n'ont rien à voir avec ceux dont le franchissement est susceptible de générer le nouvel apprentissage. La gestion simultanée des élèves qui sont vraiment sur la question du jour et de ceux qui ne peuvent pas encore l'envisager est alors quasiment impossible. Il est essentiel de veiller à n'être pas contraint soit d'arrêter tout le monde pour faire des rappels dont certains n'ont pas besoin, soit de poursuivre au risque que le nouvel apprentissage ne fasse pas sens pour ceux qui ne sont pas entrés dans la tâche. Pour ce faire, il faut anticiper et préparer l'avenir.
Par exemple, dans une introduction du théorème de Pythagore à l'aide d'un puzzle, les élèves ont besoin de maîtriser le concept d'aire et de le distinguer de celui de périmètre. Deux à trois semaines avant de travailler sur ce théorème, on peut donc envisager les activités mentales suivantes, pendant deux ou trois minutes au début de plusieurs séances :

- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même aire et des périmètres différents.
- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même périmètre et des aires différentes.
- Le périmètre d'un carré vaut 36 cm. Son côté vaut donc …
- L'aire d'un carré vaut 36 cm ² Son côté vaut donc ...

On peut aussi donner un exercice à la maison :

Les pièces du Curvica Triangulaire s'obtiennent à partir d'un triangle équilatéral dont on peut choisir de creuser, bomber ou laisser en l'état chaque côté :



Classer ces pièces dans l'ordre croissant de leurs périmètres, puis dans l'ordre croissant de leurs aires.

Cette préparation aura un double intérêt : elle permettra de travailler sur les prérequis de l'apprentissage du théorème de Pythagore, mais aussi de faire progresser les élèves sur des aptitudes du socle.
Ces précautions rendront les élèves plus disponibles pour la nouveauté et s'il en reste quelques-uns en difficulté sur la notion d'aire, ils seront peu nombreux et le professeur pourra alors les accompagner de façon spécifique.

III. L'évaluation du socle commun

Mettre en œuvre le socle commun implique de faire vivre concrètement en classe deux objectifs de formation : le souhaitable pour tous, le nécessaire à tous. De façon analogue, l'évaluation acquiert un double enjeu : mesurer l'acquisition des aptitudes du programme et de celles du socle commun.

1. Un attendu demeure : évaluer les aptitudes relevant du programme

L'évaluation des aptitudes relevant du programme, qui fait partie des pratiques professionnelles installées, reste bien un attendu du collège.
Toutefois, renforcer dans ce type d'évaluation une entrée par les aptitudes, entrée qui bien qu'elle fasse partie des préconisations des programmes de mathématiques ne participe pas encore assez de la culture commune, faciliterait la gestion du double objectif d'évaluation.

Quelques principes généraux d'une évaluation par compétences, tels que l'on peut les trouver dans le rapport de l'inspection générale sur le livret de compétences[4] :

> « *Une compétence ne peut être évaluée sans prendre en compte la stabilité de la réponse et la variété du contexte de présentation de la tâche à réaliser.[…] L'avantage offert par le CCF* [contrôle en cours de formation]*, autorisant une validation des acquis à plusieurs reprises dans le cursus scolaire, réduit le risque de validation aléatoire de la compétence attendue* ».

Et comme le souligne l'introduction du programme de mathématiques :

> « *L'évaluation de la maîtrise d'une capacité par les élèves ne peut pas se limiter à la seule vérification de son fonctionnement dans des exercices techniques. Il faut aussi s'assurer que les élèves sont capables de la mobiliser d'eux-mêmes, en même temps que d'autres capacités, dans des situations où leur usage n'est pas explicitement sollicité dans la question posée.* »

Un autre éclairage apporté par Bruno RACINE (Président du HCE) Revue Administration et Education N°114 Juin 2007 :

> « *Une compétence est un ensemble de ressources : les ressources traditionnelles, à savoir les connaissances, mais aussi la capacité à mettre en œuvre ces connaissances et des attitudes, c'est-à-dire des dispositions d'esprit plus générales. La compétence est acquise non seulement quand ces ressources sont maîtrisées mais encore quand la personne sait les mobiliser en situation. Il ne s'agit plus seulement pour l'élève de connaître le théorème de Pythagore mais de penser à l'utiliser et de savoir l'utiliser par exemple pour calculer une distance au dehors, ce qui présuppose que l'élève prenne l'habitude d'analyser une situation concrète avec des outils mathématiques.* »

Précisons ce que maîtriser une compétence veut dire.

Quand on cherche à mesurer la maîtrise d'une compétence, il est nécessaire d'envisager la mobilisation de la ressource (connaissances, capacités) dans des situations variées.
On peut en effet prévoir plusieurs niveaux de maîtrise.

Premier niveau de maîtrise :

La simple restitution de savoir, comme dans les exercices d'application à l'identique. Autrement dit, si l'on reprend l'exemple du théorème de Pythagore, être capable, dans une situation simple dans laquelle le contexte d'utilisation de ce théorème est explicite, de l'utiliser.

- pour calculer la longueur d'un des trois côtés d'un triangle rectangle connaissant la longueur des deux autres.
- pour discerner si un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés est rectangle ou non.

[4] Rapport IGEN « Les livrets de compétence, nouveaux outils pour l'évaluation des acquis des élèves », N°2007-048, juin 2007

Second niveau de maîtrise :
Réinvestissement de la ressource dans une situation simple mais inédite.

Troisième niveau de maîtrise :
Savoir choisir et combiner plusieurs ressources autrement dit être capable d'identifier des contextes pertinents d'utilisation de cette ressource (l'utiliser correctement et quand il le faut, ne pas l'utiliser quand il ne le faut pas), y compris dans des situations plus complexes.

> ***Quand on cherche à savoir si un élève maîtrise une compétence faisant partie des attendus du programme, il est donc important d'évaluer cette maîtrise à plusieurs reprises tout en veillant à proposer des situations d'évaluation permettant de varier le niveau de maîtrise attendu. Mettre cela concrètement en œuvre a, bien entendu, des incidences sur la conception des sujets de devoirs.***

L'évaluation de la maîtrise du programme aboutit traditionnellement à des notes. Même si ces notes permettent de donner des informations sur le niveau de maîtrise globale du programme, elles ne donnent pas trace de la connaissance beaucoup plus fine que l'on peut avoir sur chaque élève.
Pour autant ***il ne s'agit pas, dans le cadre actuel de la mise en œuvre du programme et du socle commun, de rejeter ce système traditionnel de notation qui reste bien un attendu institutionnel.***

2. L'évaluation du socle commun

Trop d'élèves de collège se révèlent incapables de réussir les évaluations destinées à mesurer la maîtrise du programme. Ces élèves obtiennent très souvent des notes basses qui finissent par les décourager totalement, voire par déconstruire leur implication dans leur travail.
Pour autant, s'ils ne mènent pas à bien les tâches données en évaluation du programme, ces élèves peuvent tout de même faire preuve de certaines compétences au sein même de ce travail.
Or, les notes permettent difficilement de mettre en évidence leurs réussites, elles ne donnent pas d'information sur la maîtrise ou la non-maîtrise d'une compétence.
Par exemple, un élève peut être capable de conduire un bon raisonnement et rencontrer une difficulté sur la réalisation technique ou, ce qui est très fréquent, rendre une mise en forme écrite de son raisonnement défectueuse. Il n'obtiendra alors qu'une note terne alors qu'il a pu prouver deux capacités essentielles, capacité à analyser une question et capacité à élaborer une stratégie adaptée. Mais la note ne le montre pas. Autrement dit :

> ***Évaluer la maîtrise d'aptitudes n'est pas facilité par la notation. Ainsi évaluer ne peut plus se résumer à noter : c'est une évolution importante induite par l'évaluation du socle commun.***

Le socle ayant vocation à permettre à tout élève de tirer parti de l'enseignement reçu, on devrait donc, pour les élèves en difficulté sur les acquisitions prévues dans le programme, pouvoir constater, lors de toute évaluation, les compétences qu'ils montrent dans des réalisations imparfaites montrant l'apparition d'éléments positifs dans leurs performances.

De plus, pour ces élèves-là, le plus important (on l'a vu dans la partie formation) consiste à leur permettre d'acquérir des postures propres à la résolution de problème et donc il est essentiel de parvenir à évaluer ces acquis.
Cela ne signifie pas que l'évaluation de la maîtrise des techniques doive disparaître mais plutôt qu'elle doit rester à sa juste place. L'évaluation de micro-connaissances et de savoir-faire élémentaires – évalués séparément dans des exercices purement techniques – n'est pas l'objectif final de cette évaluation.

L'évaluation de l'acquisition (ou du degré d'acquisition) des aptitudes relevant du socle commun ne saurait donc se faire à travers des exercices purement techniques testant de manière répétitive des micro-compétences (telles que « additionner deux nombres en écriture fractionnaire » ou « calculer par produit en croix une quatrième proportionnelle dans un tableau de proportionnalité »).

C'est dans la résolution de problèmes, et tout particulièrement des problèmes liés à des situations familières, que cette évaluation doit être prioritairement envisagée.
En outre, évaluer la maîtrise des capacités du socle commun dans la résolution de problèmes est un atout pour gérer la tension entre « évaluer le programme » et « évaluer le socle commun », parce qu'on rejoint là l'ambition fixée aussi par le programme.

D'où la question fil rouge de cette réflexion :

> ***« Comment évaluer la capacité de tous les élèves, et tout particulièrement des élèves qui rencontrent des difficultés dans l'acquisition du programme, à prendre des initiatives, à élaborer une stratégie de résolution, à réaliser une tâche technique, à comprendre qu'ils sont dans l'erreur …? »***

3. Qu'évalue-t-on dans la résolution de problèmes ?

Évaluer la maîtrise des capacités du socle commun doit donc être prioritairement envisagé dans le cadre de la résolution de problèmes. Mais quelles capacités évalue-t-on dans ce cadre ?

a) Les capacités nécessaires à la résolution de problèmes

Résoudre un problème nécessite la maîtrise de tout ou partie des capacités relevant du socle commun qui suivent :

- Rechercher et organiser l'information ;
- Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer ;
- Calculer, mesurer, appliquer des consignes ;
- Communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

b) Pour évaluer ces capacités, il est indispensable que les problèmes soient conçus et posés sous une forme adaptée

Il est possible de modifier un énoncé de manière à mobiliser avec des niveaux d'exigences différents (et donc évaluer leur maîtrise), les capacités suivantes : prendre l'information utile, concevoir et réaliser un traitement d'information, critiquer et communiquer les résultats obtenus.

C'est en jouant sur le niveau de complexité de chacun de ces quatre groupes de capacités que l'on peut évaluer alternativement l'une ou l'autre, plutôt l'une que l'autre, tout en restant dans le cadre de la résolution du problème choisi.
Il suffit pour cela de faire un travail d'analyse didactique de l'énoncé du problème.

Par ailleurs, il ne faudrait pas qu'un élève en difficulté n'ait à résoudre dans le cadre de l'évaluation que des problèmes dont la complexité nécessite que son professeur lui donne des aides importantes et réduise finalement l'activité de cet élève à l'application de techniques.
À certains moments, l'élève doit aussi être conduit à résoudre en autonomie un problème plus simple mais qui pose tout de même une véritable ***question***.

c) Des exemples d'exploitations de problèmes

❖ ***Premier exemple : l'horaire des trains***

Cet exercice privilégie la recherche d'informations dans une situation de la vie quotidienne.

Un usager de la SNCF souhaite se rendre de Paris (gare de Lyon) à Champagne-sur-Seine (commune de Seine-et-Marne) le dimanche 2 novembre. Il a des contraintes horaires et souhaite :

- quitter Paris après 10 heures et arriver à Champagne-sur-Seine avant 15 heures ;
- avoir une durée de transport la plus courte possible.

Il dispose de la fiche horaire suivante.

PARIS LYON – MONTEREAU (via MORET ou HÉRICY)

Horaires Transilien du 24 août au 13 décembre 2008

Notes à consulter	L		LS	LS	LS	LV	1-2cl D	LS	1-2cl	LV	LV	1-2cl		D	LS	1	D	2	3	S	1-2cl		2			1-2cl	4	S	LS			LV
Paris Lyon	0:34		5:57	5:57		6:31	6:31		7:13	7:34		8:13		9:13	9:28	10:34	10:34	10:34		10:34	11:31			12:42		13:38				14:34		16:07
Melun (Arrivée)	0:58		6:24	6:24		6:59	6:59		7:37	8:00		8:38		9:37	9:52	11:01	11:01	11:01		11:01	11:55			13:08		14:02				15:02		16:33
Melun (Départ)	0:59	1:29	6:27	6:32	6:32	7:00	7:00	7:28	7:39	8:01	8:15	8:39	9:01	9:38	9:54	11:04	11:02	11:14	11:14	11:14	11:56	12:06	12:20	13:09	13:30	14:03	14:24	14:24	14:35	15:03	15:28	16:37
Bois le Roi		1:35		6:37	6:37	7:05	7:05			8:08		8:44		9:44	10:00		11:09	11:20	11:20	11:20	12:02		12:26	13:14		14:09			14:42	15:08		
Fontainebleau Avon	1:10	1:42	6:38	6:45	6:45	7:11	7:12		7:49	8:14		8:51		9:54	10:06	11:16	11:21	11:27	11:27	11:31	12:09		12:34	13:22		14:16			14:50	15:15		16:48
Thomery				6:49	6:49					8:19		8:55		9:59	10:11		11:26	11:32	11:32	11:36				13:26						15:19		
Moret Veneux Les Sablons	1:15	1:49	6:44	6:53	6:53	7:18	7:19		7:55	8:22		8:59		10:02	10:14	11:24	11:30	11:36	11:36	11:40	12:15		12:40	13:30		14:24			14:56	15:23		16:54
Saint-Mammès		1:51		6:56	6:56	7:20	7:21			8:25		9:01			10:17		11:32	11:38	11:38	11:42	12:17			13:32		14:26				15:25		
Livry sur Seine								7:31			8:19		9:04									12:09						14:27				
Chartrettes								7:35					9:08									12:13						14:31				
Fontaine le Port								7:40			8:25		9:13									12:18			13:38		14:32	14:36			15:36	
Héricy								7:45			8:31		9:18									12:23			13:43		14:37	14:41			15:41	
Vulaines sur Seine								7:48					9:21									12:26						14:44				
Champagne sur Seine								7:53			8:38		9:26									12:31			13:49		14:43	14:49			15:47	
Vernou sur Seine								7:58					9:31									12:36						14:54				
La Grande Paroisse								8:02					9:35									12:40						14:58				
Montereau		1:58		7:03	7:03	7:28	7:28	8:07		8:34	8:47	9:08	9:39		10:25		11:40	11:45	11:45	11:50	12:24	12:45		13:40	13:58	14:34	14:52	15:02		15:33	15:56	

Notes à consulter	LV *	1-2cl LV	LS	SD	SD	1-2cl LV	LV	LV	LV	1-2cl	1-2cl	S	LS	LV	1-2cl	LV	LV	SD	SD	1-2cl LV	LV		1-2cl	LV
Paris Lyon	16:22	16:42		16:47	16:47	17:04	17:13	17:24	17:45	18:04	18:07		18:09	18:13	18:31		18:51	18:51	18:51	19:11	19:13		19:42	20:13
Melun (Arrivée)	16:49			17:13	17:13	17:29	17:39		18:10		18:31		18:36	18:41	18:57		19:16	19:18	19:18		19:41		20:11	20:37
Melun (Départ)	16:50		16:50	17:16	17:19	17:30	17:45		18:17		18:32	18:36	18:37	18:49	18:58	19:04	19:17	19:21	19:24		19:42	19:47	20:12	20:38
Bois le Roi					17:24								18:43		19:04				19:29		19:48		20:18	
Fontainebleau Avon	17:01			17:26	17:31	17:40		18:03			18:42		18:51		19:12		19:27	19:32	19:36		19:55		20:25	20:48
Thomery					17:36			18:03													20:00			
Moret Veneux Les Sablons	17:08	17:17		17:32	17:39	17:46		18:11		18:39	18:49		18:57		19:19		19:32	19:38	19:43	19:49	20:04		20:32	20:54
Saint-Mammès					17:42										19:21				19:45		20:06			
Livry sur Seine							17:49		18:20			18:39				19:07						19:50		
Chartrettes												18:43				19:11						19:54		
Fontaine le Port			16:58				17:55		18:27			18:47		18:57		19:15						19:58		
Héricy			17:03				18:00		18:32			18:53		19:02		19:20						20:03		
Vulaines sur Seine												18:55				19:23						20:06		
Champagne sur Seine			17:09				18:06		18:37			19:00		19:08		19:28						20:11		
Vernou sur Seine												19:05				19:33						20:16		
La Grande Paroisse												19:10				19:37						20:20		
Montereau	17:17		17:18		17:50	17:55	18:17		18:46		18:58	19:14		19:18	19:30	19:41			19:53		20:15	20:24	20:41	

* = train au départ de Paris Bercy.
1-2cl = trains grandes lignes.
D = circule les dimanches et jours fériés.
L = circule les lundis.
LS = circule tous les jours sauf les dimanches et jours fériés.
LV = circule tous les jours sauf les samedis, dimanches et jours fériés.
S = circule les samedis.
SD = circule les samedis, dimanches et jours fériés.
1 = circule : jusqu'au 27 septembre : tous les jours sauf les dimanches ; le 4 octobre ; à partir du 11 octobre : tous les jours sauf les dimanches et jours fériés.

2 = circule : jusqu'au 26 septembre : tous les jours sauf les samedis et dimanches ; à partir du 13 octobre : tous les jours sauf les samedis, dimanches et jours fériés.
3 = circule du 29 septembre au 10 octobre : tous les jours sauf les samedis et dimanches.
4 = circule tous les jours sauf les samedis ; le 1er novembre.

Informations données sous réserve de modifications.
Circulations particulières les 1er et 11 novembre.

Il s'agit de déterminer l'heure de départ et l'heure d'arrivée de l'usager, compte tenu de ses contraintes.

Si certains élèves ont des difficultés à résoudre ce problème, il est possible de leur fournir de l'aide en leur demandant par exemple :

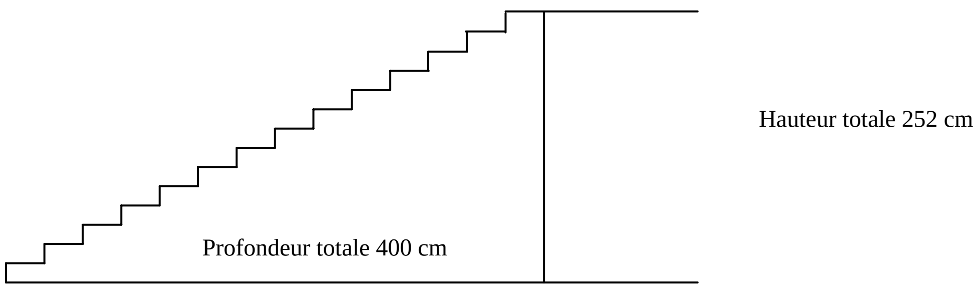
- le nombre de trains qui desservent la gare de Champagne-sur-Seine le dimanche,
- les trains qui quittent Paris après 10 heures et ceux qui arrivent à Champagne-sur-Seine avant 15 heures, par exemple en complétant un tableau :

Départ de Paris Lyon				
Arrivée à Champagne-sur-Seine				

❖ ***Deuxième exemple : l'escalier***

Cet exercice permet aux élèves de mettre en œuvre un raisonnement dont le degré de complexité peut être modulé. Il permet également de travailler la présentation de la démarche sous forme écrite ou à l'oral, l'élève expliquant l'enchaînement des idées.

Une personne vient d'acheter une maison, elle veut vérifier que l'escalier permettant d'accéder à l'étage est conforme aux normes qui indiquent une hauteur de marche comprise entre 17 cm et 20 cm. Elle dispose du schéma ci-dessous représentant l'escalier qui comporte 14 marches identiques



Pour des élèves autonomes dans la mise en œuvre d'une démarche, on peut poser la question suivante :

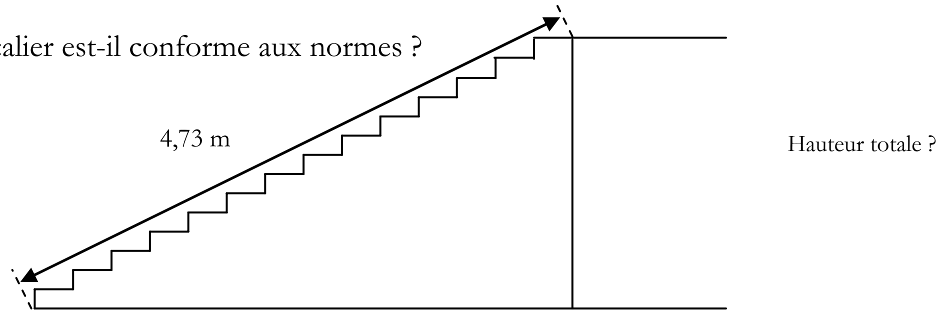
Cet escalier est-il conforme aux normes ? Présenter de façon détaillée la réponse.

Pour des élèves autonomes dans le suivi d'un protocole, on peut poser la question suivante :

Déterminer la hauteur d'une marche puis conclure sur la conformité de l'escalier. Présenter de façon détaillée la réponse.

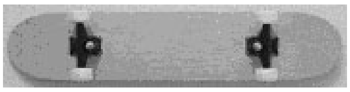
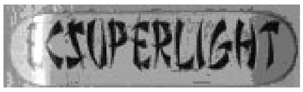
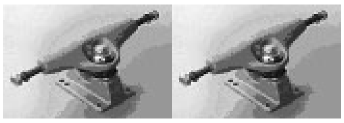
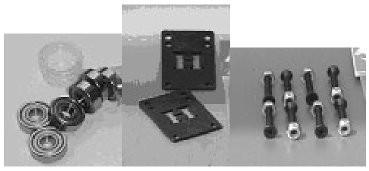
<u>Autres variantes</u> : Il y a de nombreuses possibilités pour corser ce problème : il est possible de changer les données (la hauteur totale est inconnue), on peut utiliser le mètre comme unité de longueur, on peut proposer aux élèves de déterminer le nombre de marches, on peut introduire la formule de Blondel où le giron est pris en compte…

Exemple : Cet escalier est-il conforme aux normes ?



❖ *Troisième exemple : achat d'un skate*

Éric est un grand amateur de skate. Il se rend dans le magasin SKATERS pour vérifier quelques prix. Dans ce magasin, il est possible d'acheter un skate complet. Ou bien on peut acheter une planche, un jeu de 4 roulettes, un jeu de 2 axes ainsi que les accessoires, et monter soi-même son skate.
Les prix des articles mis en vente par ce magasin sont les suivants :

Article	**Prix en zeds**	
Skate complet	82 ou 84	
Planche	40, 60 ou 65	
Un jeu de 4 roulettes	14 ou 36	
Un jeu de 2 axes	16	
Un jeu d'accessoires (roulements à bille, cales en caoutchouc, écrous et vis)	10 ou 20	

Éric veut monter lui-même son skate.
Quel est le prix minimum et le prix maximum des skates à monter soi-même dans ce magasin ?
(a) Prix minimum : zeds.
(b) Prix maximum : zeds.

❖ *Quatrième exemple : achat de cassettes pour caméscope*

Comment adapter un exercice traditionnel ?

On part de l'exercice suivant tiré d'un manuel (les références ont été modifiées) :

Sur un catalogue de vente par correspondance, le tableau suivant permet de commander des cassettes pour caméscopes.

Marque	Durée	Lot de	Référence	Prix
Audionet	60 min	4	4430 240 A	44,99 €
	90 min	4	4430 360 D	54,99 €
BAFF	30 min	4	4420 120 M	19,99 €
	60 min	4	4420 240 N	24,99 €
	90 min	4	4420 360 P	44,99 €
Magnet	60 min	à l'unité	4450 060 E	16,99 €
		3	4450 180 F	44,99 €

a- Quelle est la référence des cassettes vendues 24,99 € ?
b- Quel est le prix des cassettes dont la référence est 4420 360 P ?
c- Quelle économie fait-on en achetant 3 cassettes Magnet en lot de 3 plutôt qu'à l'unité ?

Première proposition d'exercice

Les valeurs numériques ont été modifiées pour avoir des prix entiers.
Sur un catalogue de vente par correspondance, le tableau suivant permet de commander des cassettes pour caméscopes.

Marques	**Durée**	**Lot de**	**Référence**	**Prix**
Audionet	60 min	4	4430 240 A	44 €
	90 min	4	4430 360 D	56 €
BAFF	30 min	4	4420 120 M	20 €
	60 min	4	4420 240 N	30 €
	90 min	4	4420 360 P	44 €
Magnet	60 min	à l'unité	4450 060 E	17 €
		3	4450 180 F	45 €

1. Quelle est la référence des cassettes vendues 30 € ?
2. a) Quel est le prix d'un lot de cassettes ayant pour référence 4430 360 D ?

   b) À combien revient une cassette de ce lot ?
3. Quelle économie fait-on en achetant 3 cassettes de marque Magnet en lot de 3 plutôt qu'à l'unité ?
4. Quelle est la référence de la cassette la plus économique ? Expliquer.

Deuxième proposition d'exercice

Sur un catalogue de vente par correspondance, le tableau suivant permet de commander des cassettes pour caméscopes.

Marques	Durée	Lot de	Référence	Prix
Audionet	60 min	4	4430 240 A	44 €
	90 min	4	4430 360 D	56 €
BAFF	30 min	4	4420 120 M	20 €
	60 min	4	4420 240 N	30 €
	90 min	4	4420 360 P	44 €
Magnet	60 min	à l'unité	4450 060 E	17 €
		3	4450 180 F	45 €

Il s'agit de déterminer la marque et la durée de la cassette pour laquelle la minute d'enregistrement est la plus économique.

Il est possible de graduer les questions en fonction des difficultés des élèves.

Pour des élèves autonomes dans la recherche de l'information, on peut poser directement la question suivante :

Indiquer la marque et la durée de la cassette pour laquelle la minute d'enregistrement est la plus économique.

Pour d'autres, on peut poser (et même susciter) oralement des questions intermédiaires.

1. Indiquer pour les cassettes Audionet, le coût d'une minute d'enregistrement avec :
   a. une cassette de 60 min ;
   b. une cassette de 90 min.
2. Reprendre un travail analogue avec le la marque BAFF puis avec la marque Magnet.

4. Quels moyens pour l'évaluation ?

L'évaluation de la maîtrise du socle commun par les élèves est un processus continu qui est à intégrer aux pratiques traditionnelles. Les pratiques nouvelles d'évaluation que le socle commun induit peuvent s'installer progressivement, en s'appuyant sur les pratiques habituelles.

a) Le devoir de contrôle

L'introduction du programme officiel indique :

« *L'évaluation sommative, en mathématiques, est réalisée sous trois formes complémentaires :*

• *des interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées ;*

• *des devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une phase d'apprentissage ;*

• *certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude.* »

L'évaluation diagnostique et les interrogations écrites permettent toutes deux d'évaluer certaines capacités ou connaissances du socle commun. On est alors dans la régulation du processus d'apprentissage et de l'enseignement mais pas encore dans l'évaluation terminale.
Pour cela, les deux dernières formes d'évaluation sommative citées ci-dessus sont indispensables. Ce sont elles que nous nommons « contrôles ».

❖ ***Comment faire évoluer le traditionnel contrôle ?***

Le contrôle sert à évaluer l'acquisition par les élèves des capacités et connaissances du programme. Quelle forme doit-il prendre pour servir aussi à l'évaluation des compétences du socle commun ?

Quels exercices faudrait-il y trouver ?

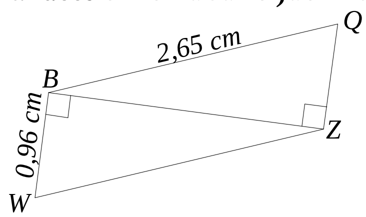
Pour qu'un contrôle puisse fournir une occasion d'évaluer l'état d'acquisition des aptitudes du socle, il est indispensable de veiller à ce que dans les sujets de contrôle, conçus pour évaluer la maîtrise du programme, il y ait aussi des exercices :

- permettant à tout élève (y compris à celui qui ne parviendra pas à maîtriser le programme) de montrer d'autres aptitudes qu'une simple restitution de savoir-faire automatisés ;
- donnant à tout élève une chance d'avoir un véritable problème à résoudre et un problème qui lui est accessible (autrement dit, dont l'énoncé n'induit pas la modélisation mathématique qui conduit à la stratégie experte non exigible dans le cadre du socle commun) ;
- permettant d'évaluer le raisonnement indépendamment de la rédaction (certains élèves conduisent de bons raisonnements mais ne parviennent pas à les mettre en forme) ;
- permettant d'évaluer la rédaction indépendamment du raisonnement.

Il est essentiel aussi de veiller à ce que des exercices fassent appel à des aptitudes travaillées dans le programme des classes antérieures mais non acquises par tous les élèves : c'est tout particulièrement le cas de connaissances ou capacités liées aux constructions géométriques de base, aux mesures, ou liées au sens des opérations.

Exemple d'exercice permettant d'évaluer le raisonnement indépendamment de la rédaction

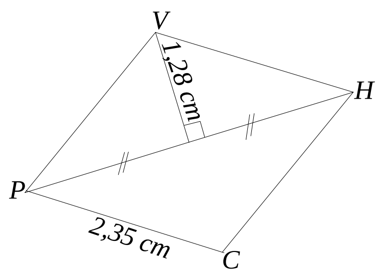
Calculer et donner les longueurs demandées ***sans aucune justification***.



BQZW est un parallélogramme.

BZ = ……………cm

Calculs faits (pas de rédaction)



PVHC est un losange.

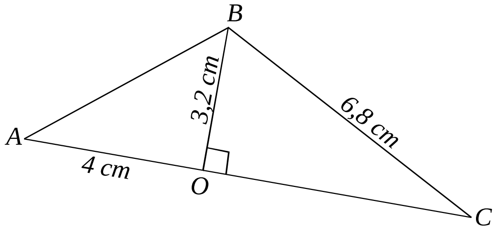
CV = ……………cm

Calculs faits (pas de rédaction)

Exemple d'exercice permettant d'évaluer la rédaction indépendamment du raisonnement

On considère un triangle *ABC*.
O est le point de [*AC*] tel que : (*BO*) ⊥ (*AC*).
De plus, on a : *BO* = 3,2 cm ; *AO* = 4 cm ; *BC* = 6,8 cm.

Le professeur de Christine lui demande de calculer l'aire du triangle *ABC* et de rédiger son travail.



Voici ce que Christine écrit :

$$6{,}8^2 - 3{,}2^2 = 36$$

$$OC = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{(4+6)\times 3{,}2}{2} = 16$$

Le professeur dit à Christine qu'elle a trouvé les bons résultats mais qu'elle doit maintenant rédiger sa solution.
Aide-la en écrivant une solution rédigée sur ta copie.

Remarque : Si on ne veut pas pénaliser les élèves qui n'auraient pas pu trouver la démarche ou ceux pour lesquels les traces de raisonnement proposées ne feraient pas sens, cet exercice gagne à être cherché en classe le cours précédent.

- ***Comment inciter un élève à garder trace de ses essais ?***

L'évaluation des réussites au travers de solutions incomplètes ou partiellement erronées n'est en effet possible que si l'élève a osé garder trace de ses essais, de ses idées, de sa recherche. Trop d'élèves n'écrivent rien : ils préfèrent ne rien écrire plutôt que d'écrire des choses fausses. Mais si un élève n'écrit rien ou s'il ne note que son résultat et que ce dernier est faux, on ne peut pas savoir ce qui, dans son raisonnement, peut avoir été correct.
D'où la nécessité en formation de libérer leur inventivité et de valoriser leurs écrits intermédiaires (voir partie formation).

Les énoncés des contrôles peuvent aussi encourager un élève à garder trace de ses essais. Pour encourager un élève à garder trace de ses essais il est possible de renforcer des précisions données à l'oral par des indications portées explicitement sur le texte du contrôle. Par exemple : « Si tu ne trouves pas la solution, tu peux écrire les idées que tu as eues quand tu as cherché : si tes idées sont pertinentes, tu peux ainsi obtenir une partie des points. »

- ***Comment exploiter ses écrits ?***

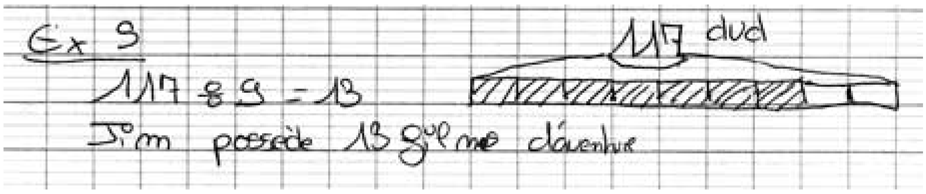
Si les élèves comprennent l'intérêt qu'ils ont à poser par écrit leurs idées, à garder traces de leurs essais, même quand ils ne sont pas certains que les pistes qu'ils ont trouvées aboutissent (ce qui n'est pas encore assez le cas puisque nombreux sont les élèves qui préfèrent ne rien écrire quand ils ne sont pas sûrs d'eux), il faudra ensuite veiller à exploiter leurs écrits et à en extraire des informations utiles pour eux.

De plus, si l'évaluation de chacune des différentes capacités constitutives de la résolution de problèmes se fait effectivement dans le cadre d'une résolution d'un problème, une telle résolution sera rarement de façon complètement tranchée totalement réussie ou *a contrario* non réussie.
Il y a donc nécessité d'évaluer distinctement chacune de ces différentes capacités. En particulier, ce n'est pas parce que le résultat est faux ou que l'élève n'a pas trouvé le résultat escompté qu'il a « tout raté ». Il va donc falloir analyser les écrits imparfaits des élèves, leurs solutions erronées, leurs essais inaboutis pour extraire des éléments positifs d'évaluation de certaines capacités du socle commun.

- ***Comment communiquer à un élève ses réussites et en garder trace ?***

Voici, à titre d'exemple, un exercice et la réponse d'un élève :

Jim a une collection de 117 DVD. Sept neuvièmes de ses DVD sont des films d'aventure.
Combien de DVD de film d'aventure Jim possède-t-il ?



Le résultat est faux mais l'élève a bien modélisé le problème et il prouve une bonne maîtrise du sens des opérations. Peut-être n'a-t-il fait qu'un oubli (1 neuvième au lieu de 7 neuvièmes). S'il avait pu être questionné par son professeur, il aurait peut-être rectifié de lui-même son erreur.
Dans le cadre de l'évaluation de la maîtrise du programme, cet élève va perdre des points sur cet exercice. Mais si cet exercice a été mis dans ce devoir pour évaluer l'aptitude des élèves à résoudre un problème dans le domaine du numérique, une information lui permettant de cibler ce qu'il a fait de bien peut être communiquée à cet élève.

Par exemple :

Rechercher et organiser l'information ;	Compétence montrée		
Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer ;	Compétence montrée		
Calculer, mesurer, appliquer des consignes ;	Compétence non montrée de façon complète		
Communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.	Compétence montrée		

> ***Les devoirs surveillés, surtout s'ils sont revisités avec cette focale, devraient permettre de valider progressivement, pour la majorité des élèves, l'acquisition de bon nombre d'aptitudes.***

Toutefois, si les écrits de quelques élèves restent insuffisamment éloquents ou insuffisamment porteurs d'informations sur leurs acquis, ils peuvent être complétés par d'autres types de contrôles ou des prises d'information dans le vécu de la classe.

> ***Des contrôles « accompagnés », une évaluation d'écrits obtenus lors d'un travail individuel mais accompagné ?***

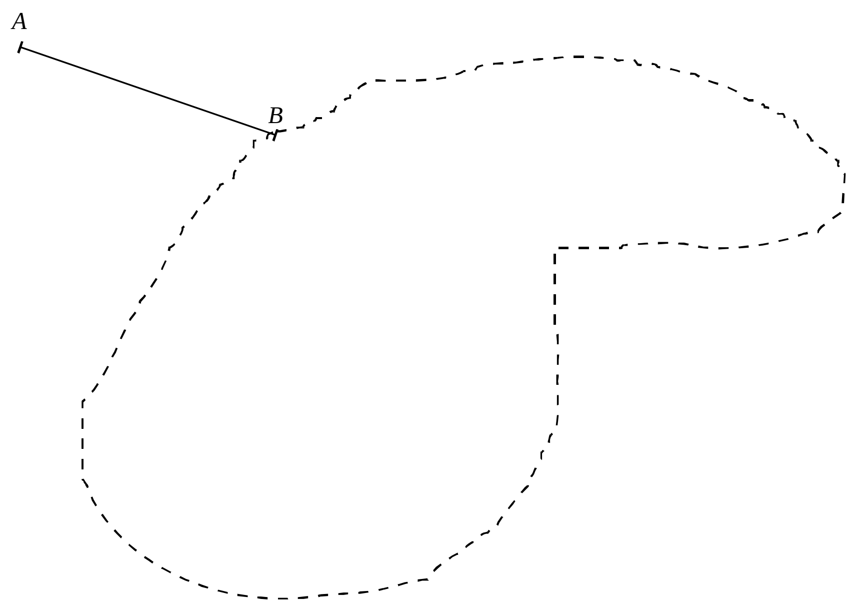
Un exemple vécu dans deux classes de 5[e] dans chacune desquelles 6 élèves sont en très grande difficulté.

Ces 6 élèves ont été regroupés géographiquement en classe le temps du contrôle. Dans chacune des classes, le professeur est intervenu auprès d'eux. Les autres ont travaillé de façon autonome. Le récit porte donc sur 12 élèves au total, 6 par classe.
Tout au long du contrôle, le professeur les a rassurés, les a aidés à dépasser certains obstacles (lecture de consignes, choix des exercices sur lesquels porter les efforts, mauvaise utilisation du rapporteur, mauvaise organisation, ...) afin que les « petites choses » que ces élèves savent faire puissent être évaluées positivement. Ces acquis ne résistent pas d'habitude face aux obstacles auxquels ces élèves se heurtent classiquement quand ils sont en autonomie.

Exercice : Construire les points C, D, E, F et G sachant que :

- La figure est dans la zone en pointillés ;
- Le point C est le symétrique du point A par rapport au point B ;
- $BCDE$ est un rectangle ;
- $CD = 5\text{cm}$;
- $\widehat{CBF} = 30°$;
- $BCGF$ est un losange.

La construction sera codée.



Ces 12 élèves ont lu et commencé le travail seuls.
Le professeur s'est assuré que tous plaçaient C. Cinq élèves ont hésité au départ : le professeur, pour les rassurer, leur a demandé si cet exercice leur rappelait des situations travaillées en classe. Tous ont su citer un exercice bien maîtrisé : une « ribambelle » de quadrilatères qui était à construire à la maison. Cela a suffi pour qu'ils démarrent.

Tous ont réussi à construire un rectangle avec l'équerre mais 4 sur les 12 n'avaient pas vu le $CD = 5$. Avec une question du genre : « comment as-tu trouvé la longueur CD ?», ils ont su rectifier et continuer.

Certains ensuite étaient coincés pour construire F (de quel côté ?) et avaient des difficultés à anticiper le losange final. Certains le pensaient en « chevauchement du rectangle » ; parmi ceux-là, quelques-uns avaient essayé mais la figure sortait de la zone autorisée. Ils ne pouvaient pas l'imaginer « de l'autre côté », ils pensaient avoir un mauvais losange. D'autres étaient complètement arrêtés par l'idée même du chevauchement sans trouver de solution. Il a suffi au professeur de montrer à ces élèves la zone dans laquelle se trouvait le losange, de leur demander de l'imaginer et de passer le doigt sur ce losange « imaginé », pour que plusieurs d'entre eux construisent le losange correctement.

Deux n'arrivaient pas à utiliser correctement le rapporteur : le professeur les a aidés. Ensuite, l'un a pu terminer. L'autre a tâtonné pour construire G à la règle sans compas mais quand le professeur lui a demandé ce qu'il savait des losanges, il a su dire que les quatre côtés sont de même longueur.
Deux autres avaient bien utilisé le rapporteur mais placé F « au bord » du rapporteur tout en sachant que le losange a quatre côtés de même longueur (ce dont le professeur s'est assuré). F placé, G n'a pas posé de problème.
Les deux derniers étaient dans l'approximation partout : le professeur leur a demandé de critiquer leur travail pour l'améliorer. Ils y sont très bien parvenus.

Au cours de tels accompagnements, les aides consistent :
1- à lever certains obstacles dont l'évaluation est différée parce que les élèves ne sont pas encore prêts ;
2- à intervenir de façon suffisamment ouverte pour amener l'élève à poursuivre son raisonnement sur de véritables questions où il pourra montrer des aptitudes à l'oral comme à l'écrit ;
3- à mener de petites interviews pour mieux analyser les erreurs commises et la nature des blocages.

> ***Aurait-on mesuré la maîtrise d'autant d'acquis chez tous ces élèves s'ils avaient eu à réaliser, en totale autonomie, cet exercice ou même s'ils avaient eu à réaliser des constructions plus élémentaires ?***

- ***Un exemple illustrant différents aspects de cette évolution***

Dans cet exemple de contrôle, présenté en annexe 7, est développé un dispositif d'attribution de crédits sur chaque compétence et chaque question du sujet. Ce dispositif complexe est présenté comme un exemple mais ne saurait être imposé aux enseignants.
Il est transparent pour les élèves au moment où ils composent. Il oblige le professeur à identifier clairement l'importance relative de chacune des quatre compétences dans chaque question. Le barème paraît complexe en première approche. Il se révèle très efficace dans son application car il lève la plupart des ambiguïtés qui ne sont pas explicitées dans un barème classique et qui tiennent justement à l'importance relative qu'on attribue, en cas d'erreur, à chaque compétence manifestée par l'élève. Les élèves découvrent la répartition des crédits lors de la correction. Le dispositif met alors clairement en lumière, pour eux aussi, les compétences. La correction permet donc à chacun de prendre conscience des objectifs fixés, de ses points forts et des points sur lesquels il reste à concentrer ses efforts. Ce dispositif, qui est applicable à chacun des quatre grands domaines des programmes, permet de donner une unité et une cohérence à l'ensemble du programme de mathématiques de l'année. Enfin, et seulement quand l'ensemble du processus est terminé afin que la note n'occulte pas le travail sur les compétences, un convertisseur que le professeur pourra choisir selon ses objectifs du moment, peut permettre de déterminer une note classique à partir des crédits obtenus. Cette note permettra la communication habituelle avec les familles et le calcul de la moyenne trimestrielle attendue. On prendra en compte le fait que les compétences sont rarement isolées et que le système fonctionne de façon positive. Par exemple, si un élève n'a pas su mobiliser la compétence C1 pour comprendre le sens de la question qui lui est posée, il ne pourra manifester la compétence C4 qui consiste à mettre en forme la réponse. Cela ne signifie donc pas qu'il ne maîtrise pas la compétence C4. Simplement, l'occasion qu'il avait de manifester cette maîtrise n'a pu être saisie. D'autres le seront peut-être ailleurs dans le problème. La maîtrise de la compétence peut donc être avérée sans une réussite totale sur toutes les opportunités offertes. Il n'est donc pas exclu de construire le convertisseur de telle sorte qu'un élève acquière le maximum des points sur une compétence donnée alors qu'il n'avait pas capitalisé la totalité des crédits possibles sur cette compétence.

Remarque :
La répartition des crédits évaluant la compétence C4 peut être globalisée (comme c'est le cas dans l'épreuve du brevet où la présentation, rédaction, soin et orthographe fait l'objet de l'attribution de quatre points isolés du barème des exercices).

b) L'évaluation en situation dans la classe

Quels que soient les efforts qui sont faits pour revisiter les traditionnels contrôles et les rendre plus propices à l'évaluation des compétences du socle commun, certains élèves en difficulté ne réussissent pas à montrer tout ce qu'ils savent faire au sein de ces évaluations habituelles.

Mais peut-être oublie-t-on parfois que toutes les productions des élèves, et surtout celles des élèves qui ont des difficultés, peuvent être d'autres occasions d'évaluer positivement ce qui n'a pu l'être en contrôle.

❖ ***Exploitation d'écrits obtenus à l'occasion d'un travail en classe***

Un exemple :

Deux exercices sont posés à des élèves de 4^{e}

1. J'achète 2 kg 500 de pommes de terre pour 3 € 25.
Combien paiera le client suivant pour 1 kg 600 ?

2. Un bébé pèse 4,5 kg à 3 mois.
Quel sera son poids à 6 mois ?

Les élèves travaillent individuellement pendant une dizaine de minutes : ils doivent rédiger leur solution sur une feuille (il leur est bien précisé qu'il ne s'agit pas d'une interrogation écrite, mais d'un travail préparatoire à une concertation en petits groupes).
Ce travail individuel est suivi d'un travail en petits groupes avec production d'un écrit collectif sur transparents.
La plénière destinée à l'étude des transparents sera l'occasion d'une mutualisation de ce que les élèves savent.
La consigne a été donnée de ne pas retoucher les productions individuelles. Cela permet au professeur de les relever pour repérer d'ores et déjà ce qui peut être évalué positivement dans le cadre de la proportionnalité.

Quelques productions d'élèves :

1) 2,500 ÷ 1,600 = 1,5625 .

3,25 ÷ 1,5625 = 2,08 .

Le client suivant paiera 2,08€ pour 1 kg 600.

2) On ne sait pas car le bébé ne prend pas toujours le même poid par mois.

1) 2 Kg 500 de pommes coûte 3€25 on cherche le prix de 1Kg600.

~~2500~~ 3,25 ÷ 2500 je ne sais pas!

2) On ne peut pas savoir sa dépend de plusieurs chose!

---

1) 3,25 ÷ 2,500 = 1,3

1,3 × 1,600 = 2,08

Le client suivant paiera 2,08

2) 4,5 ÷ 3 = 1,5

le bébé pesait 1,5 kg a la naissance

1,5 × 6 = 9

A six mois le bébé pesera 9 kg.

---

prix du client préc. : par le poid

1. = 3,25 : 1,6 = 2,03

Il paiera 2,03 €.

2. On ne c'est pas car cela dépend comment est nourris l'enfant, ou autre chose mais on ne pas savoir.

1:

	$\div 1{,}5$	
Poid	2,5 kg	1,600
Prix	3€25	2,1
	$\div 1{,}5$	

Le client suivant paiera 2,1€ pour 1,600 kg.

2: On ne peut pas savoir car le poid n'est pas proportionnelle au temps.

1) 3.25 - 2.500 = 0.75
Donc il faut trouver un nombre qui et le même écart avec 1.600
2.500 + 0.75 = 3.25
Donc
1.600 + 0.75 = 2.35

Le prix est de 2,35€

2) 4,5 × 2 = 9
car il faut doublé le poids car 3+3 = 6.

1. 2K500 représente 3€25.
3,25 ÷ 5 = 0,65€
Alors 500 g représente 0,65€.
0,65 ÷ 5 = 0,13€
donc 100 g représente 0,13€.
500 x 3 = 1500
alors 0,65 x 3 = 1,95
1500 + 100 = 1600
Alors 1,95 + 0,13 = 2,08
Le client paiera 2,08€ pour 1Kg 600 de pomme de terre.

2. On ne peux pas savoir. Ce n'est pas obliger que sa soit x2. car il peut peut-être plus grossir ou moins grossir.

1) 3,25 € ÷ 2,5 Kg = 1,3 , 1,3 × 1,6 = 2,08 donc 1,6 Kg est égal à 2,08 €

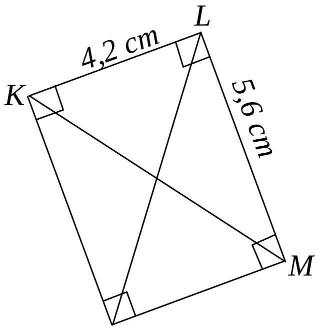
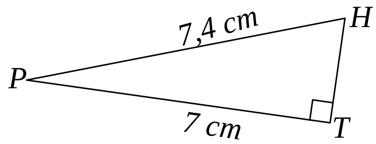
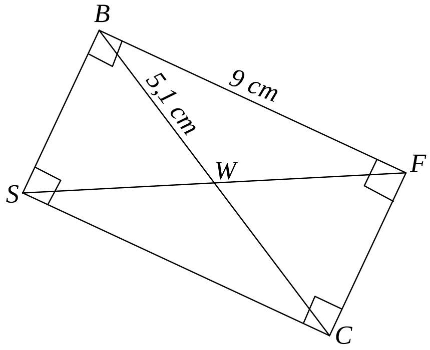
2) nous ne pouvons pas savoir, car le poids ne peut pas être stable, il ne fera surement pas le double de son poids actuel

❖ *Exploitation de l'oral*

La prise de parole d'un élève en plénière ou pendant des échanges entre élèves, l'oralisation de sa stratégie pendant une mise en commun, peuvent permettre pour certains élèves de compléter la prise d'informations nécessaire.

Exemple :
Au début d'une séance, au cours d'une période où aucun travail particulier n'est fait sur les théorèmes de géométrie ou sur les propriétés des figures planes, le professeur propose aux élèves de calculer trois longueurs.

Les élèves n'ont rien à rédiger. L'attendu est simplement qu'ils écrivent leurs trois résultats sur leur cahier de recherche.

 KM = ………. cm	 HT = ………. cm	 BC = ………. cm

Au cours du travail, le professeur s'intéresse tout particulièrement aux élèves qui n'ont pas encore été évalués positivement au cours de l'année sur la compétence suivante du socle :
Utiliser les propriétés d'une figure et les théorèmes de géométrie plane pour traiter une situation simple.
Il peut, éventuellement, constater que certains ont progressé.
Il peut aussi, lors de la plénière de synthèse, demander qui n'a pas trouvé le résultat correct et chercher quel type d'erreur a été commise. Ce sondage, complété par une ou deux interviews d'élèves sur les erreurs qu'ils ont commises, peut permettre aussi de compléter des évaluations du socle.

> ***Les professeurs ont l'habitude d'observer finement leurs élèves au travail pour nourrir leurs choix didactiques et apporter les aides les plus appropriées. Mais il est possible d'ajouter un autre objectif à cette observation : le repérage chez quelques élèves en difficulté de compétences ciblées.***

Professeurs comme élèves ont tout à gagner à cette nouvelle observation évaluatrice puisqu'elle peut aussi permettre de piloter la classe avec des indicateurs plus précis et donc de mieux mesurer ce qui reste à faire.

> ***Autrement dit, il s'agit de mieux observer pour mieux évaluer, et de mieux évaluer pour mieux former.***

❖ *L'utilisation des TIC par les élèves et son évaluation*

Dans la vie personnelle, comme dans la vie professionnelle, l'utilisation des mathématiques ne se conçoit guère aujourd'hui sans utilisation de logiciels (sur ordinateur ou calculatrice). Il est donc essentiel, comme il est inscrit dans les programmes, que les aptitudes liées à l'utilisation des TIC en mathématiques soient travaillées et évaluées. Cela va dans le sens de la simplification technique avec une plus large part dévolue à l'esprit critique et aux procédures de contrôle.

Exemples[5] :

Situation n°1

J'ai acheté des cahiers à 2 € 50 *l'un et des crayons à* 1 € 20 *l'un. J'ai payé* 54 € 30. *Combien ai-je acheté de cahiers et de crayons ?*

Modalité de travail
Une heure en salle multimédia. 27 élèves qui travaillent par groupe de 2. L'énoncé du problème est distribué aux élèves.
L'utilisation de l'ordinateur n'est pas imposée mais un ordinateur est disponible en cas de besoin.

[5] Ces exemples ont été présentés par Stéphane Percot lors du séminaire « Utilisation des outils logiciels en mathématiques », organisé par la DGESCO et le groupe des mathématiques de l'IGEN, Paris, 5 et 6 février 2007.

Quelques stratégies

Des élèves font des essais avec un nombre donné de cahiers et de crayons mais ne gardent pas trace des essais successifs :

- élaboration d'une feuille de calcul permettant de garder trace des essais ;
- quelques tentatives infructueuses : même nombre de crayons que de cahiers. Après une première réaction consistant à dire que « le problème n'a pas de solution ! », les élèves parviennent à formaliser leur erreur ;
- une stratégie très opérationnelle est inventée : on ne peut avoir acheté plus de 45 crayons. On calcule les 45 premiers multiples de 1,20 €. Puis on fait apparaître dans une nouvelle colonne le résultat de 54,30 € moins tous ces multiples. On regarde si, dans cette colonne, il y a des multiples de 2,50 €. Alors, on a toutes les solutions ;
- de nombreux groupes arrivent à trouver une solution au bout de 20 minutes de travail.

Tout en valorisant la solution trouvée, le professeur relance la recherche en soulevant la question de savoir s'il peut y avoir d'autres solutions. Les stratégies évoluent : il s'agit, à présent, de ne plus tâtonner mais d'élaborer une stratégie permettant de trouver tous les cas.

La séance en salle informatique est suivie d'une séance en salle de classe durant laquelle le professeur fait le point sur les différentes stratégies mises en œuvre. Elles sont analysées ; leurs efficacités sont comparées. Des stratégies plus expertes comme celle du tableau à double entrée sont présentées par les deux élèves qui les ont mises en œuvre.

Situation n°2

Julie et Carole ont travaillé pendant le mois d'août. Au total, elles ont reçu exactement le même salaire. Pourtant, Julie était payée 7,50 € *de l'heure alors que Carole était payée* 7,80 € *de l'heure. Mais, Carole a travaillé, au cours du mois, six heures de moins que Julie. Combien d'heures chacune d'entre elles a t-elle travaillé durant le mois d'août ?*

Modalité de travail :

Une heure en salle multimédia. 27 élèves qui travaillent par groupe de 2. L'énoncé du problème est distribué aux élèves.

L'utilisation de l'ordinateur n'est pas imposée mais un ordinateur est disponible en cas de besoin.

Les élèves se mettent très vite au travail. Ils essaient des choses sur le tableur, avec de plus en plus de dextérité par rapport à l'outil qu'ils utilisent en autonomie pour la quatrième séance.

Quelques stratégies :

- des élèves font des essais avec un nombre donné d'heures de travail pour l'une et pour l'autre, avec prise en compte des 6h d'écart. Ils tâtonnent et trouvent une solution ;
- des élèves font une feuille de calcul de manière à garder trace des deux salaires pour un grand nombre de cas. Mais, certains élèves s'arrêtent de tirer la formule inventée car ils n'osent pas générer un tableau de 150 colonnes ;
- certains ont trouvé en tirant de 10 en 10 les heures et en affinant lorsqu'ils avaient trouvé l'intervalle dans lequel se trouvait la solution. La vie réelle (35 heures par semaine, 7 heures par jour) intervient dans leurs essais.

Principes d'évaluation :

Ce qu'il faut évaluer avant tout dans une séance avec usage de moyens logiciels, c'est l'aptitude de l'élève à s'engager dans une résolution de problème : capacité d'initiative, d'expérimentation de communication. Cela suppose que l'outil informatique en lui-même (matériel et logiciel) ne pose pas de problème donc qu'il y ait eu un travail préalable pour l'acquisition des compétences liées à l'usage des

TIC (pilier 4 du socle) en mathématiques. Il est indispensable que soient installés, dans ce domaine comme dans les autres, les automatismes permettant un usage intelligent de la machine.

c) D'autres types d'évaluation

❖ ***L'évaluation diagnostique***

La nature des mathématiques fait qu'elles se construisent en permanence sur les acquis antérieurs. Cette caractéristique forte est bien connue de tous, mais cela ne signifie pas que toutes ses conséquences en sont toujours bien mesurées : à qui n'est-il pas arrivé de constater qu'une séance ne permettait pas d'atteindre l'objectif visé parce que, au cours du travail proposé, des élèves ne disposaient pas d'acquis indispensables pour avancer ?
Avant d'aborder chacune des notions du programme, il sera donc efficace de s'assurer que les élèves maîtrisent un certain nombre de pré-requis en leur proposant quelques questions, courtes, qui les mettent en jeu et qui sont ainsi propices à une évaluation diagnostique.

Quelques exemples

Le sens de l'égalité

Les différents sens du symbole « égalité » qui se révèlent souvent des obstacles majeurs.
Supposons que l'objectif soit de construire un sens nouveau au symbole « = » : égalité entre deux formules autrement dit deux formules qui donnent toujours le même résultat quel que soit le nombre sur lequel on les teste.
Diagnostic à faire : s'assurer que les élèves ne sont pas restés à la seule vision du « = » comme traduction de « j'effectue » et qu'ils sont en capacité de l'entendre aussi comme « autre écriture d'un même nombre ».
Exercices proposés :

1. Écrire le nombre 36
   - sous la forme du produit de deux nombres
   - sous la forme de la somme de deux nombres
   - sous la forme du double d'un nombre
   - …

2. Trouver une écriture de 25 montrant :
   - que c'est le quart d'un nombre
   - que c'est la somme de deux entiers consécutifs
   - que c'est le double de 12,5
   - …

3. Trouver les nombres qui manquent :
$56 = ... \times 7$; $4 \times 9 = 6 \times .....$; $85,4 - 13,8 = 50 + ...$; $7 \times 9 = ... + 3$; $49 + ... = 7 \times 8$

Substitution de la valeur des lettres dans une formule

La substitution de valeurs numériques dans une expression littérale est travaillée dès la classe de sixième et le test d'égalité est un point fort du programme de cinquième.

Diagnostic à faire : s'assurer que les élèves savent substituer sa valeur à une variable pour calculer la valeur d'une expression littérale ou tester une égalité.

Exercices proposés :

1. Calculer $3a+10$ pour $a=4$
2. Calculer $3+2\times b$ pour $b=5$
3. Calculer $(c+3)\times(4+d)$ pour $c=2$ et $d=6$
4. Est-ce que l'égalité $3x+4=2x+5$ est vraie pour $x=2$? Justifier la réponse.
5. Est-ce que l'égalité $3x+4=2x+5$ est vraie pour $x=1$? Justifier la réponse.

Ce test permettra au professeur, non pas de mettre une note qui ne présente aucun intérêt pour l'objectif poursuivi ici, mais de réaliser une photographie de l'état des acquis de la classe sur les deux prérequis testés. Selon le nombre d'élèves pour lesquels des difficultés sont diagnostiquées, les formes à donner à l'aide pourront être variables.

Multiplication des nombres relatifs

Diagnostic à faire : s'assurer de la maîtrise de la distributivité, qui est utilisée pour introduire la multiplication des nombres relatifs.

Exercices proposés :

Comment peut-on calculer mentalement 42×21 ? 42×19 ? $47\times 12+47\times 88$?

Il est nécessaire de prévoir un laps de temps suffisant entre cette évaluation diagnostique et l'introduction des notions nouvelles qui la motivent puisqu'il faut aussi prévoir le temps nécessaire à un éventuel travail de remédiation pour les élèves en difficulté.
Les remédiations nécessaires sur des notions de base pour un tout petit nombre d'élèves peuvent être l'objet d'un PPRE.

Cette évaluation diagnostique est particulièrement adaptée à la mise en place du socle commun. Elle passe en effet par un relevé d'aptitudes chez chaque élève et par un traitement de la difficulté de chacun. Elle offre au professeur une opportunité de prendre des informations précieuses pour pouvoir ensuite attester de la maîtrise ou non de certaines aptitudes du socle.
Finalement, l'évaluation diagnostique visera le plus souvent des aptitudes élémentaires, relevant du socle commun, qui apparaissent comme des préalables à la poursuite de l'étude prévue par le programme.

> ***L'évaluation diagnostique apparaît donc comme un dispositif particulièrement adapté pour réunir et pour servir conjointement les deux types d'objectifs différents qui sont ceux du socle et du programme.***

❖ ***L'autoévaluation***

Engager les élèves dans une démarche d'auto-évaluation est une manière particulièrement efficace de les aider, non seulement à construire leur autonomie, mais aussi à renforcer leur motivation et leur implication. À la charnière entre formation et évaluation, l'auto-évaluation contribue à la construction par l'élève lui-même des critères qui permettent de savoir qu'un travail est réussi ou pas, qu'une aptitude est acquise ou pas. Un élève qui s'auto-évalue donne davantage de sens aux conclusions des évaluations : il identifie plus aisément ses réussites, analyse plus sereinement ce qu'il lui reste encore à travailler.

Les dispositifs propices à l'auto-évaluation sont multiples et il est possible d'en intégrer à toute pratique pédagogique. En voici quelques exemples :

Exemple 1

À l'occasion d'un devoir en classe, on peut proposer aux élèves d'auto-évaluer leur travail, directement sur leur copie, le jour même où ils composent. Il peut être envisagé de prévoir un bonus pour tous ceux d'entre eux qui auront un écart global minime avec l'évaluation finale.
Quand on procède de cette manière, le travail de correction, lors de la remise des copies, est nettement motivé par la recherche des raisons qui peuvent expliquer les écarts entre les réussites prévues et celles réellement obtenues. Les élèves interrogent plus finement que d'habitude leur production avant de la rendre : ils sont ainsi souvent conduits à l'améliorer. En outre, ils développent de bons réflexes de relecture.

Exemple 2

Lorsque les élèves sont conduits à rendre sur feuille un travail précis, le choix peut être fait d'évaluer globalement la production de chacun en évitant de l'annoter. Les copies sont ainsi rendues aux élèves ; les critères de l'évaluation leur sont donnés. Chaque élève est alors conduit à évaluer son travail et éventuellement à annoter sa copie. Un travail est ensuite mené sur l'explication des écarts éventuels entre leur évaluation et celle faite par le professeur.
Dans un tel protocole, les élèves reviennent plus facilement que d'habitude sur leur travail et cherchent davantage à comprendre leurs erreurs ou leurs manques, curieux de savoir ce qui explique l'évaluation du professeur quelle qu'elle soit.

Exemple 3

Les activités rapides de début de séance (voir **Entraînement par petites touches** dans la partie formation) offrent de bonnes occasions d'installer simplement des pratiques d'auto-évaluation. Après de telles activités, on peut prendre l'habitude de demander lesquels des élèves pensent être ou ne pas être au point sur le sujet abordé. Les élèves répondent en levant la main. On peut alors choisir d'interviewer deux ou trois élèves parmi ceux qui ont répondu non, pour savoir ce qu'ils comptent faire pour progresser. Les autres élèves peuvent fournir des conseils.
Un tel protocole est peu chronophage. Certains élèves ont du mal à regarder en face leurs difficultés et développent des stratégies de fuite. Ce protocole permet de travailler sur leur prise de conscience. En outre, il permet de les responsabiliser progressivement : « tu constates que tu n'y arrives pas, je peux t'aider mais, toi, de ton côté, que comptes-tu faire ? ».

Exemple 4

Lorsque l'on fait une synthèse sur des exercices, on peut prendre l'habitude de questionner les élèves sur leurs réussites, leurs erreurs, ce qu'ils pensent pouvoir améliorer la prochaine fois…
Par exemple on peut dire : « Untel, tu as dit que tu t'étais trompé. Maintenant que nous avons terminé cet entraînement, peux-tu dire quel type d'erreur tu avais commis ? » ou « Untel, tu as expliqué que ton texte n'était pas très bon, peux-tu dire comment tu feras pour en écrire un meilleur la prochaine fois ? »…

5. Les outils pour thésauriser l'information en vue de la validation

À compléter lorsqu'on connaîtra les conditions de la validation du socle commun. L'exemple qui suit est une simple étape dans la réflexion, prenant appui sur les grilles actuelles.

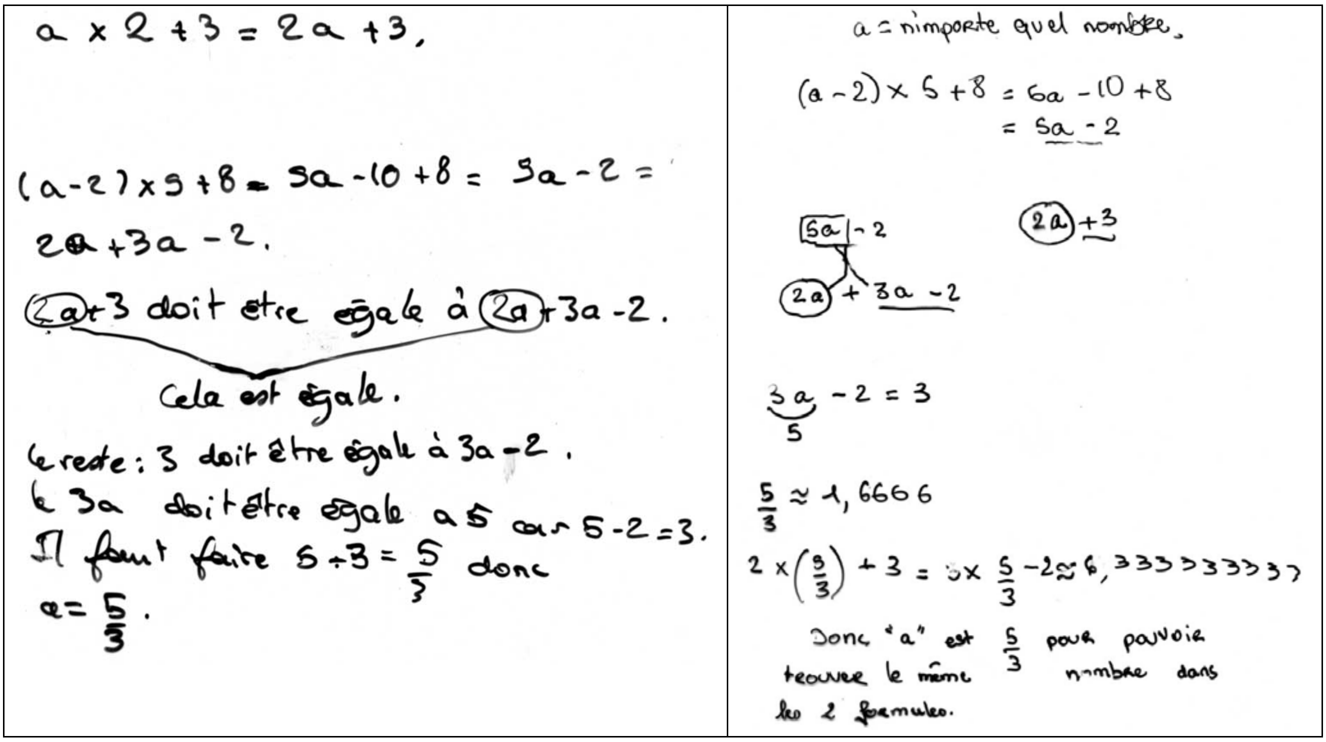
Exemple de fiche (projet, extrait de la fiche 6^{e})

Connaissances et capacités attendues en fin de scolarité obligatoire	Éléments du socle exigibles en fin de sixième	Validation		
Reconnaître des situations de proportionnalité, utiliser des pourcentages, des tableaux, des graphiques. Exploiter des données statistiques et aborder des situations simples de probabilité.	- Reconnaître si deux grandeurs sont ou non proportionnelles et, dans l'affirmative : • utiliser un coefficient de proportionnalité; • utiliser les propriétés de linéarité.			
	- Relier pourcentages et fractions.			
	- Appliquer un pourcentage.			
	- Repérer un point sur une droite graduée.			
	- Lire, utiliser et interpréter des données présentées sous forme de tableaux, de graphiques.			
Connaître et utiliser les nombres entiers, décimaux et fractionnaires. Mener à bien un calcul selon des modalités adaptées : calcul mental, à la main, à la calculatrice, avec un ordinateur.	- Mobiliser des écritures différentes d'un même nombre.			.
	- Comparer des nombres.			
	- Choisir l'opération qui convient au traitement de la situation étudiée.			
	- Maîtriser de manière automatisée les tables de multiplication « dans un sens ou dans l'autre » pour effectuer un calcul mental simple, un calcul réfléchi, un calcul posé portant sur des nombres de taille raisonnable.			
	- Mener à bien un calcul instrumenté (calculatrice).			
	- Évaluer mentalement un ordre de grandeur du résultat avant de se lancer dans un calcul.			
	- Contrôler un résultat à l'aide d'une calculatrice.			
Connaître et représenter des figures géométriques et des objets de l'espace. Utiliser leurs propriétés.	- Effectuer des constructions simples en utilisant : • des instruments de dessin • des définitions, des propriétés (en acte et sans nécessité d'indiquer ou de justifier la méthode choisie). Les tracés doivent pouvoir être réalisés sur papier uni.			
	- Utiliser les propriétés d'une figure et les théorèmes de géométrie pour traiter une situation simple.			
	- Raisonner logiquement.			
	- Interpréter une représentation plane d'un objet de l'espace, un patron.			

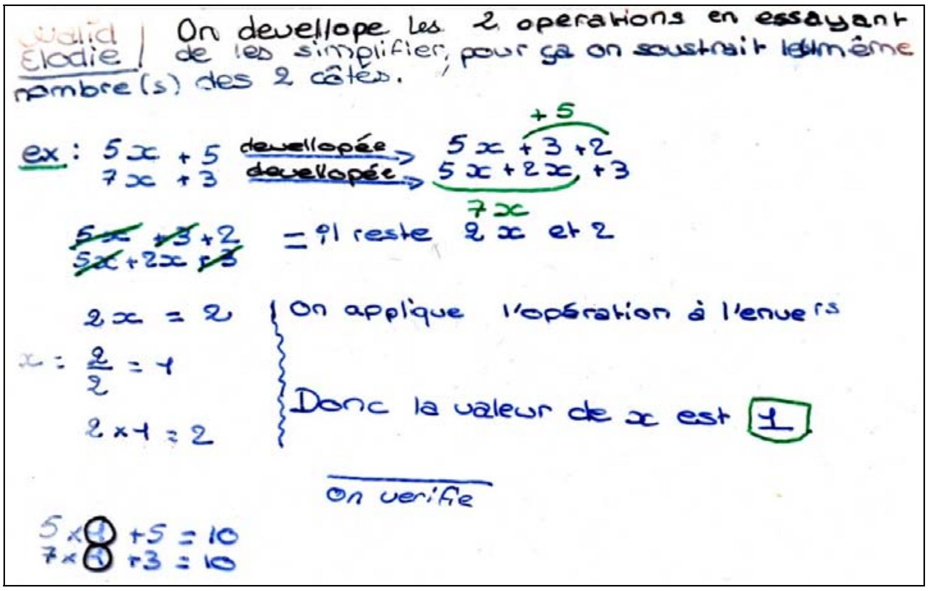
ANNEXES

Annexe 1 : productions d'élèves

Productions d'élèves pour le problème 2



Un exemple de résolution « artisanale » de $5x+5=7x+3$ avant la présentation de la résolution experte par le professeur.



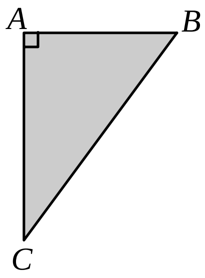
Annexe 2 : propriété de Pythagore

Un exemple de stratégie pédagogique élaborée dans le but de construire les acquis sur la propriété de Pythagore sans chercher à proposer une approche expérimentale (dans le document d'accompagnement de géométrie p. 14, il est expliqué qu'une telle approche n'est pas vraiment possible). Le but visé consiste aussi à laisser le plus de place possible pour une véritable activité mathématique de chaque élève.

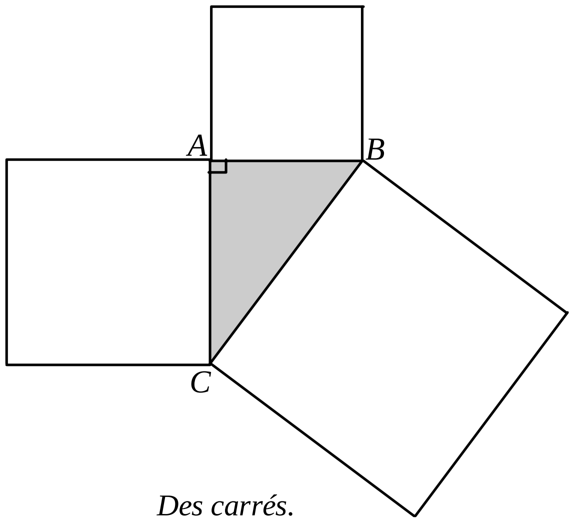
Durée de la séquence (temps indicatif : 100 min)

Phase 1 : récit du professeur (comme une histoire).

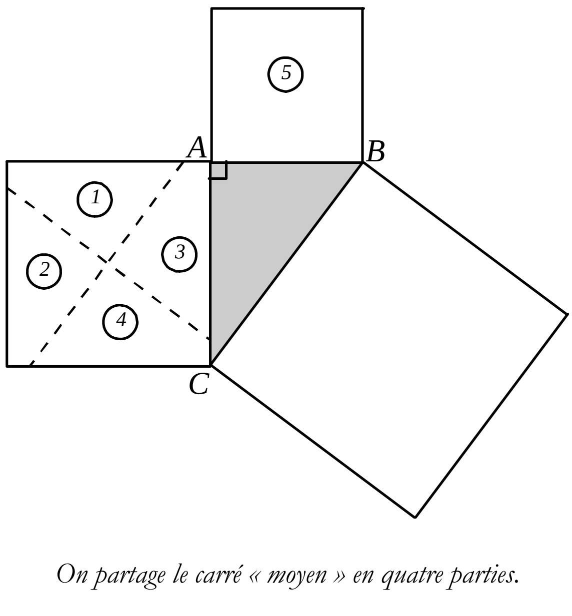
Une célèbre propriété des triangles rectangles



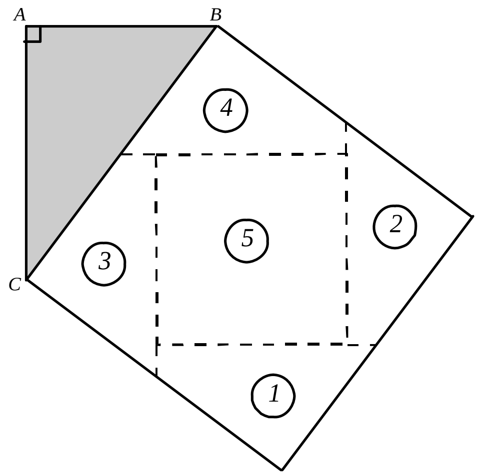
Un triangle rectangle quelconque.



Des carrés.



On partage le carré « moyen » en quatre parties.



Des mathématiciens ont prouvé que l'on peut « recouvrir » parfaitement le grand carré avec les deux autres carrés.
Ils en ont déduit une propriété concernant les côtés des triangles rectangles.

L'assemblage du puzzle est montré à l'aide d'un appareil de visualisation collective. Rien de plus n'est dit. L'exercice suivant est aussitôt proposé.

Phase 2 : les élèves s'emparent du récit pour construire un nouvel outil.

Exercice
ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm.
À quoi peut te servir la découverte des mathématiciens dans cette situation ?

Travail individuel strict + concertation-consensus en groupe + plénière.
Lors de la plénière, le triangle ABC et les trois carrés du puzzle sont dessinés au tableau, à main levée.
Le lien entre l'idée de "recouvrement parfait" et l'égalité des aires est établi.
Les aires sont notées dans les deux plus petits carrés, leur somme dans le plus grand.
Le côté du grand carré est trouvé mentalement, bien sûr sans recourir à la calculatrice.
L'occasion de remédier à la confusion entre « aire et périmètre » se présente : la division de 25 par 4 et non pas la recherche d'un nombre dont le carré est 25.
Pour commencer le chemin vers $\sqrt{a}$, la formulation « quel est le nombre positif qui a pour carré 25 ? » est utilisée.

On reprend l'exercice avec
a) $AB = 2{,}8$ cm et $AC = 9{,}6$ cm b) $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm puis c) $BC = 5{,}8$ cm et $AC = 4{,}2$ cm.

Travail individuel avec entraide si nécessaire.
Les élèves font des croquis avec les carrés (souvent parce qu'ils l'ont vu faire lors de la plénière précédente). S'ils ne le font pas et restent en difficulté, on peut les engager à le faire. Certains se libèrent progressivement des croquis, d'autres pas.

Ces croquis vont constituer des images mentales fortes pour la suite : l'élève est engagé à ne pas oublier d'où viennent les carrés des nombres, à tenir des raisonnement du type « on ne peut pas recouvrir le petit carré avec le moyen et le grand » et donc à consolider le sens de la soustraction.
Mobiliser la propriété ne repose pas de façon nécessaire sur l'application d'une identité qui peut se révéler trop abstraite et difficilement accessible à certains élèves. Aucun élève n'est donc bloqué dans son activité mathématique.
Aucune rédaction particulière n'est demandée à ce stade. Les élèves n'adhéreraient pas très bien et trouveraient artificielle – à juste titre – une rédaction détaillée dans ce genre de situation simple.

Remarque : Les élèves qui ont fini plus vite peuvent être dirigés vers des problèmes qui ne seront pas proposés à tous et qui peuvent ne pas du tout mobiliser ce nouveau savoir. En fin de séquence, est institutionnalisé ce que tout élève a compris, à savoir : les croquis et les calculs.

Annexe 3 : productions d'élèves en géométrie

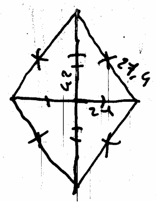
Problème :
Le côté d'un losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales 42 cm.
Quelle est la longueur de sa seconde diagonale ?

Productions d'élèves :

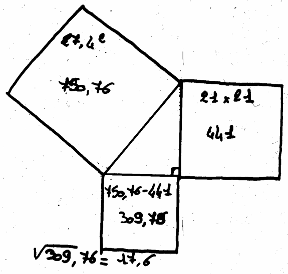
- On sait que un côté du losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales mesure 42 cm
- pour trouver la deuxième diagonale on fait :

42 ÷ 2 = 21 cm

conclusion : donc l'autre diagonal fait 21 cm



Un losange est composé de 4 triangles rectangle.

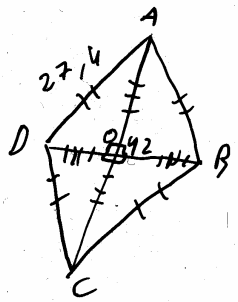


√309,76 = 17,6

Nous avons pris la moitié de la diagonale ce qui fait 17,6 pour trouver la longueur de la diagonale il faut multiplier par 2 :

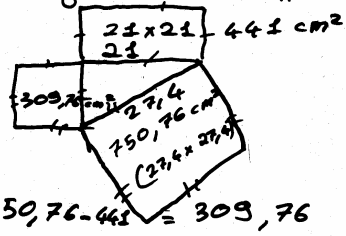
17,6 x 2 = 35,2

La longueur de la diagonale est 35,2 cm.



Dans le triangle AOD rectangle en O
$AD^2 - AO^2 = DO^2$
$27,4^2 - 21^2 = 309,76$
$\sqrt{309,76} \simeq 17,6$
17,6 x 2 = 35,2
Donc la seconde diagonale mesure 35,2 cm

Sachant que un losange a des diagonales perpendiculaires on peut trouver le côté d'une des diagonales comme avec un triangle rectangle en prenant la longueur d'une des diagonales et un côté



750,76 - 441 = 309,76
17,6 x 17,6 = 309,76 donc le côté mesure 17,6 cm

Annexe 4 : un exemple de protocole d'alternance maison-classe

Remarque préalable :
Dans ce travail, les élèves les plus fragiles rencontrent des difficultés dès le moment où ils essaient de faire la figure. Les autres font la figure, conjecturent et prouvent assez facilement que le quadrilatère est un parallélogramme. Par contre, le fait que PIQA est un rectangle échappe à beaucoup. Le démontrer présente une véritable difficulté pour tous et les débats à ce stade sont très riches.
Le protocole qui suit permet d'accompagner les élèves de façon différenciée dans leurs difficultés (même précoces) pour que tous puissent être bien concernés par le débat centré sur l'argumentation qui mène au rectangle.

Au jour 1, on donne aux élèves l'énoncé suivant :

C est un cercle de centre I. M est un point de C. A est le symétrique de *I* par rapport à M. La médiatrice de [MI] coupe le cercle en deux points : soit P l'un d'eux. Q est le symétrique de P par rapport à M. Quelle est la nature du quadrilatère PIQA ? Justifier la réponse.

Pour le jour 2, ils doivent faire la figure et, en cas de difficulté, préparer des questions précises par écrit.
Au jour 2, en plénière, des questions sont posées aux élèves qui ont réussi, par les élèves qui ont eu des difficultés. Les premières fois où ce dispositif est utilisé, les élèves posent souvent des questions trop vagues. Mais petit à petit, ils apprennent à s'en emparer et leurs questions deviennent propices à une avancée.
Le professeur engage les élèves à rappeler la définition et la propriété caractéristique de la médiatrice, par exemple.
Pour le jour 3, chacun devra avoir une figure correcte et une conjecture de la réponse.
Au jour 3, les élèves échangent leurs cahiers pour contrôler les figures et énoncent leurs conjectures. Le professeur peut animer un débat sans se positionner lui-même.
Pour le jour 4, chacun doit mettre par écrit, sur le cahier de recherche, une argumentation pour prouver sa conjecture.
Au jour 4, les élèves débattent toujours sans que le professeur se positionne. En revanche, il demande à certains de reformuler définitions et théorèmes utiles.
Pour le jour 5, chaque élève écrit son argumentation personnelle ou rédige une démonstration complète sur une copie que le professeur relèvera.
À chaque séance, dix minutes sont consacrées à ce travail. Le reste de la séance est mené de façon ordinaire sur du numérique, par exemple.
Avec un tel protocole, on observe que les phénomènes négatifs décrits plus haut sont beaucoup moins fréquents. En effet, les élèves en difficulté se sentent épaulés et retrouvent de la motivation. En outre, ils constatent que leurs efforts sont récompensés puisque leur production est en général de qualité tout à fait correcte. Les erreurs et les maladresses que le professeur y trouve sont exploitables et lors de la synthèse, ils ont encore la possibilité de progresser.

Certains élèves sont en trop grande difficulté pour affronter seuls certains travaux à la maison : c'est une des raisons principales qui les poussent à les désinvestir. Dans ce dispositif, ils savent que, même s'ils sont bloqués à certains moments devant la tâche, ils vont quand même produire quelque chose d'utile, une question pour le lendemain, par exemple : ils ne seront pas des élèves en échec, mais des élèves qui cherchent.

Annexe 5 : exemple de questions « défi »

On donne un exemple de questions « défi » posées à certains qui peut être l'occasion d'une mise en commun collective (ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe).

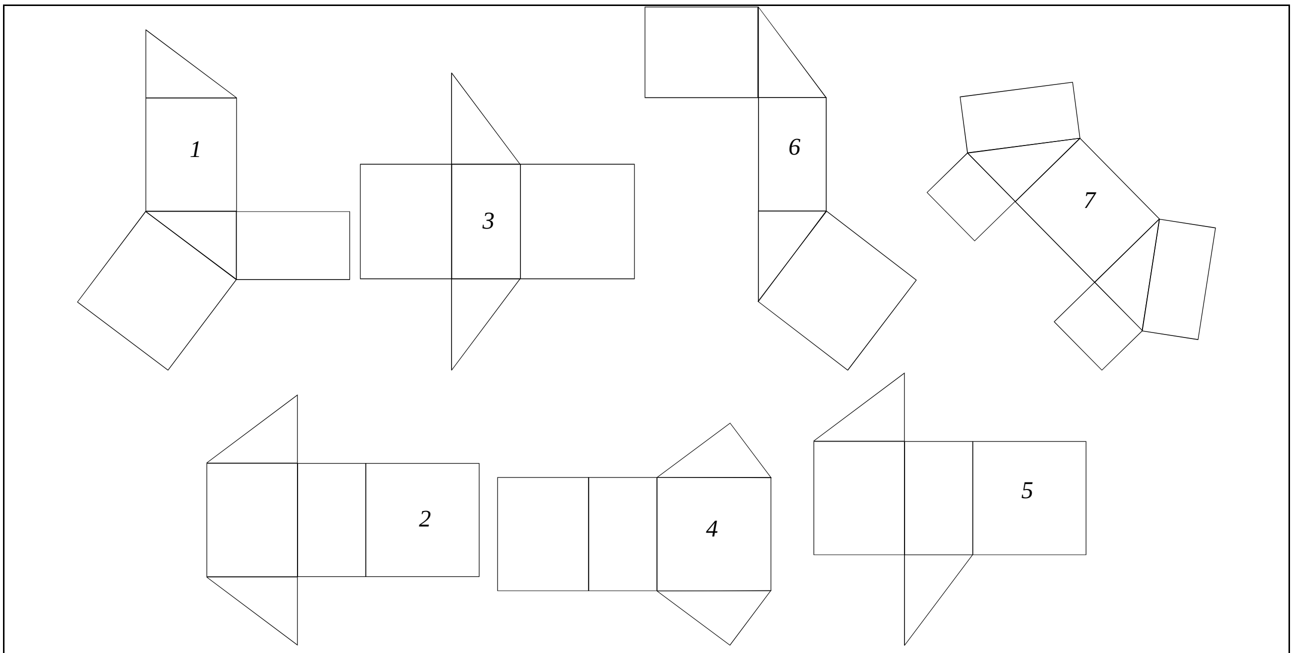
Exercice donné à tous :

Tu travailles dans une usine qui fabrique des bonbons. Ces bonbons ont la forme de petits triangles rectangles de 5 mm d'épaisseur et dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm. Tu dois concevoir des boîtes en carton qui permettent de ranger une pile de 10 bonbons. Dessine, à main levée, une représentation en perspective cavalière d'une de ces boîtes et prépare un patron qui permette de la fabriquer.

Très vite, on voit les écarts se creuser entre les élèves. On peut alors différencier le travail pour éviter que le groupe ne devienne ingérable et permettre à chacun de travailler à son niveau.
Par exemple, définir trois types de contrat :

1. Les élèves en difficulté ne feront que l'exercice. Certains vont bénéficier d'une aide importante : on peut leur montrer les boîtes construites, les leur laisser en manipulation éventuellement. Ils pourront prendre le temps de travailler sur les constructions élémentaires de géométrie plane.
2. Les élèves un peu plus à l'aise feront deux ou trois patrons non superposables. Cette seconde consigne peut leur être donnée à la fin du premier travail.
3. Les plus rapides essaieront de construire le patron le plus original : ce sera leur défi.

Au fil du travail, il est possible de glaner un nombre important de patrons non superposables, justes ou faux, des plus classiques aux plus originaux.
Voici les productions d'une classe :



À la fin de ce travail, on peut retrouver la classe unie sur une même activité : les patrons collectés et représentés sur transparents par le professeur sont-ils satisfaisants ? A quoi le voit-on ?
Les élèves en difficulté pourront manipuler les patrons sur papier pour conforter la classe dans la réponse proposée.
Dans cet exemple, les élèves en difficulté ont un véritable temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle » que constitue le travail sur les prismes.

Annexe 6 : Exemple de protocole d'enseignement pour l'addition des relatifs

Séance 1
Le professeur : *« Il y a quelques temps, nous avons découvert de nouveaux nombres : les nombres décimaux relatifs. On voudrait pouvoir les additionner en gardant toutes les règles de calcul qu'on utilise déjà avec les nombres positifs. Comment faire ? »*
$(-2)+5=?$
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : $(-2)+2=0$ (la somme de 2 nombres opposés est nulle). Donc $\boxed{(-2)+5=(-2)+2+3=3}$
En travail individuel : $7+(-3)=$; $(-3{,}2)+6=$.
Fin de séance : autre chose.

Séance 2
$(-5)+8{,}7=$; $(-3)+(-4)=$
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : $(-3)+(-4)+7=(-3)+(-4)+3+4=(-3)+3+(-4)+4=0$ donc $\boxed{(-3)+(-4)=(-7)}$
En travail individuel : $(-2{,}5)+(-3)=$; $8{,}4+(-6)=$; $(-3{,}2)+(-1{,}2)=$.
Fin de séance : autre chose.

Séance 3
$(-5)+(-6)=$; $9+(-3)=$; $(-9)+2=$
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : $(-9)+2=(-7)+(-2)+2=-7$, donc $\boxed{(-9)+2=-7}$

Calcul mental en travail individuel
$(-3)+2=$; $(-2)+(-1)=$; $5+(-4)=$.

Séance 4
Les élèves s'entraînent en autonomie par deux ou en petits groupes pour préparer une évaluation formative.
Pendant cet entraînement, ils ont consigne de s'entraider à progresser. Ils s'expliquent donc les uns aux autres. Certains commencent à recourir à des explications qui s'appuient bien sur le caractère générique des exemples étudiés. Progressivement, les élèves reviennent moins aux justifications initiales : des règles "élèves" émergent ici et là, sans être imposées à tous.

Par la suite, en plénière, les erreurs seront travaillées par recours aux justifications initiales.
Cependant, des élèves diront qu'ils ont remarqué que la somme de deux nombres relatifs négatifs est négative et que dans ce cas, ils ajoutent les distances à 0. Ces remarques seront valorisées sans être imposées à tous.
Ainsi, les uns peuvent avancer sans être retardés tandis que d'autres peuvent disposer d'un peu plus de temps pour expérimenter.

Un peu chaque jour : un ou deux calculs.

Annexe 7 : un exemple sur le thème de la proportionnalité

Le sujet *(la page 2 est donnée après que la page 1 a été relevée)*

Un chauffeur de taxi pratique un tarif donné par le tableau suivant :

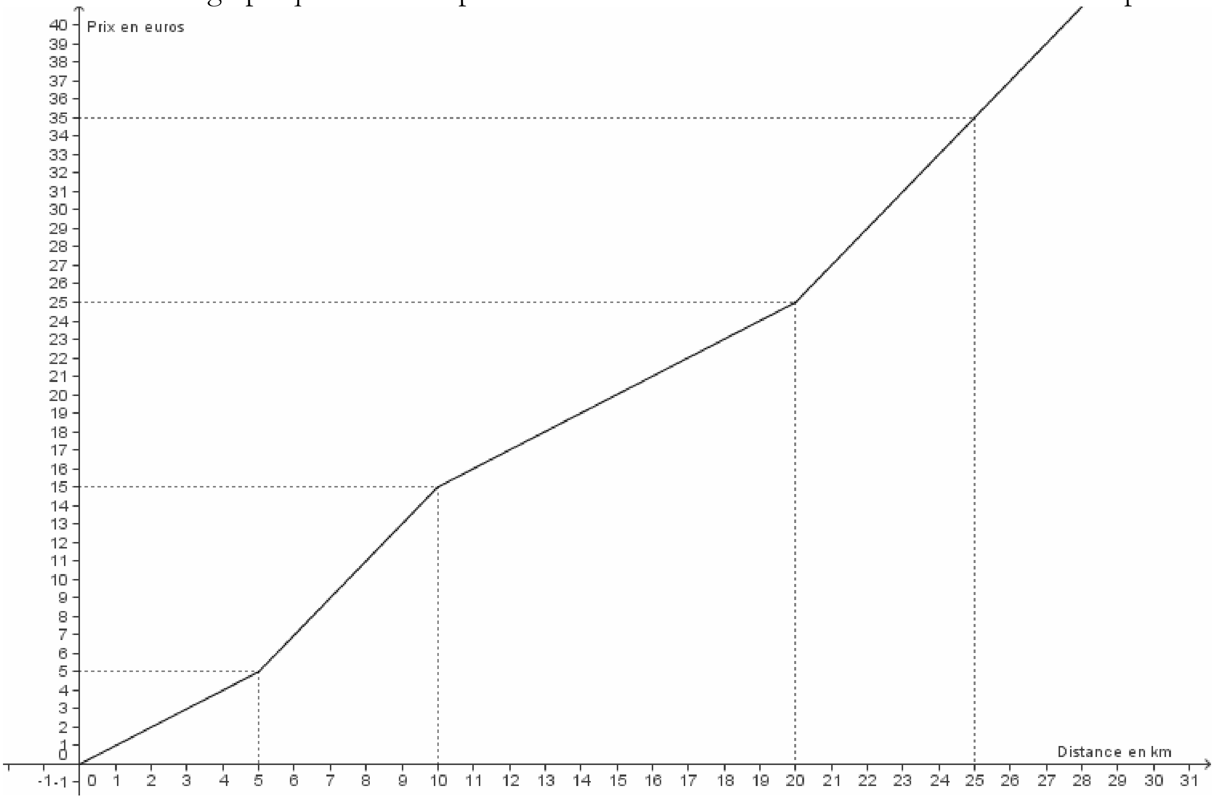
Distance (en km)	0 à 5	5 à 10	10 à 20	Plus de 20
Prix (en €)	1 € par km	2€ par km moins 5 €	1 € par km plus 5 €	2 € par km moins 15 €

1)a) Combien paie un client pour parcourir 7,5 km ? 15 km ? 22,5 km ?

b) Sur les trois valeurs obtenues, y a-t-il proportionnalité entre la distance et le prix ? Justifier.

2) Dans le tarif pratiqué par ce taxi, le prix est-il ***toujours*** proportionnel à la distance ? Justifier.

On considère le graphique suivant représentant le tarif d'un taxi en fonction de la distance parcourue :



1) Y a-t-il proportionnalité entre la distance et le prix ? Justifier.

2) Pour parcourir 13 km le prix à payer est de 18 €.
   a) Marquer le point A correspondant à ce trajet sur le graphique.
   b) Marquer sur le graphique, deux autres points B et C, tels qu'il y ait proportionnalité entre les distances et les prix correspondant aux trois points A, B et C.
   c) Par lecture sur le graphique, donner des valeurs approchées des distances parcourues et des prix payés correspondant à chacun des points B et C :

3) Pierre part de chez lui pour se rendre à la gare en taxi. Karim fait la même chose. Sachant que Karim habite 1 km plus loin de la gare que Pierre, peut-on savoir combien Karim paiera de plus que Pierre ? Expliquer.

BARÈME

Principe :
Chaque question est évaluée par compétences, à l'aide de crédits. Sur chaque question, un certain nombre de crédits est affecté à chacune des trois premières compétences de résolution de problème :

C1 : Rechercher et organiser l'information.
C2 : Calculer, mesurer, appliquer des consignes.
C3 : Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer.
C4 : Communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

Un algorithme permet ensuite de fournir une note sur 20 classique en vue de la communication aux familles et de l'alimentation de la moyenne trimestrielle.

Crédits

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
1) a)	4 (2 calculs écrits ou résultats)	2 (2 résultats corrects suffisent)	0	2 (usage signe =, rédaction, unités)
1) b)	0	2 (opérateur ou relation de linéarité ...)	2 (4 procédures de raisonnement observées)	2 (usage signe =, rédaction, unités)
2)	1 (calcul d'un prix)	1 (calcul d'un prix)	2 (recours à un contre exemple)	2 (usage signe =, rédaction, unités)
1)	2 (compréhension situation : lien distance-prix)	0	2 (caractérisation graphique)	2 (rédaction)
2) a)	0	2 (point placé)	0	0
2) b)	0	2 (placement B et C)	2 (évocation ou tracé suggérant l'alignement)	0
2) c)	0	2 (coordonnées cohérentes avec le graphique)	0	0
3)	0	0	2 (explication acceptable hors rédaction)	2 (rédaction, unités)
Total	7	11	10	10

Le convertisseur des crédits en note :

5 points pour chaque compétence :

C1 : Note (de 0 à 5) = Crédits – 2 (note négative ramenée à 0)
C2 : Note (de 0 à 5) = Crédits ÷ 2 (note plafonnée à 5)
C3 : Note (de 0 à 5) = Crédits (note plafonnée à 5)
C4 : Note (de 0 à 5) = Crédits (note plafonnée à 5)

Question 1) a) – Analyse de quelques réponses d'élèves

7,5 km = 7x2 + 1 = 15   15 - 5 = 10 €
Pour parcourir 7,5 km un client paie 10 €.
15 km = 15 x 1 = 15   15 + 5 = 20 €
Pour parcourir 15 km un client paie 20 €.
22,5 km = 22 x 2 = 44   44+1 = 45   45 - 15 = 30 €
Pour parcourir 22,5 km un client paie 30 €.

Élève 2	
C1	4
C2	2
C3	
C4	1

7,5 = 15
15 = 20
22,5 = 30

Élève 10	
C1	4
C2	2
C3	
C4	0

Pour 7,5 Km le client paie 10€.
Pour 15 Km le client paie 20€.
Pour 22,5 Km le client paie 30€.

Élève 22	
C1	4
C2	2
C3	
C4	2

Commentaire :

La compétence C1 est mobilisée pour comprendre le mode de calcul du tarif du taxi. Elle constitue le point principal dans cette question. La compétence C2 s'exerce de façon limitée pour effectuer quelques opérations simples. La présence de deux résultats exacts est considérée comme suffisante pour attester d'une mobilisation efficace de chacune de ces deux compétences. La compétence C3 est absente de cette question. La compétence C4 intervient : on attend une réponse rédigée utilisant des unités adéquates. La présence de calculs n'est pas exigée mais si l'élève prend l'initiative d'en inclure dans sa réponse, il doit les présenter correctement, notamment pour ce qui concerne l'usage du signe =.

L'élève 2 perd ainsi un crédit sur la compétence C4 en raison d'un usage inapproprié du signe =. Le barème pourra apparaître très favorable à l'élève 10. L'objectif est bien d'évaluer la maîtrise de chaque compétence par chaque élève et non de classer les élèves, tentation qui est toujours plus ou moins sous-jacente dans la notation sommative classique.

Question 1) b) – Analyse de quelques réponses d'élèves

OUI, il y à proportionaliter car $7,5 \times 2 = 15$ et $10 \times 2 = 20$€ et $15 + 7,5 = 22,5$ et $10 + 20 = 30$€

Élève 14	
C1	
C2	2
C3	2
C4	1

Oui il y a proportionnalité entre la distance et le prix. ex :

÷ 1,5

22,5	15
30	20

÷ 1,5

÷2

15	7,5
20	10

÷ 2

Élève 4	
C1	
C2	2
C3	2
C4	2

Non car de 7,5 km et 15 km il y a 7,5 km de différence et par le prix 10€ et 20€ il y a 10€ de différence

de 15km à 22,5km il y a aussi 7,5km de différence et pourtant le prix (20€ et 29€) il y a non pas 10€ de différences mais 9€.

Élève 21	
C1	
C2	2
C3	2
C4	2

Oui, il y a proportionalitée car

+7,5 +7,5

7,5	15	22,5
10	20	30

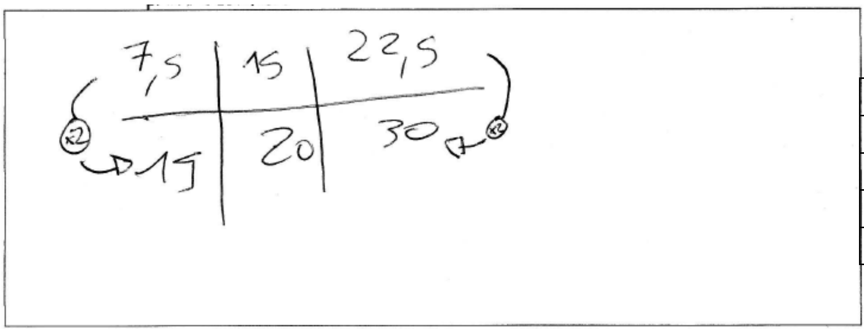
+10 +10

Élève 11	
C1	
C2	2
C3	1
C4	2

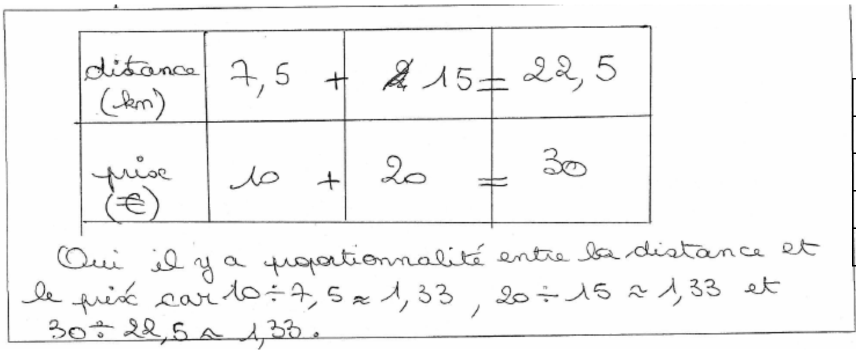
Il y a proportionnalité entre la distance et le prix.

1Km = 0,75 centimes

Élève 15	
C1	
C2	2
C3	1
C4	1



Élève 10	
C1	
C2	0
C3	0
C4	0



distance (km)	7,5 +	15 =	22,5
prix (€)	10 +	20 =	30

Oui il y a proportionnalité entre la distance et le prix car 10÷7,5 ≈ 1,33 , 20÷15 ≈ 1,33 et 30÷22,5 ≈ 1,33.

Élève 23	
C1	
C2	2
C3	2
C4	2

Commentaire :

Dans ce problème, l'objectif n'est pas de contrôler une connaissance ou une capacité enseignée. Il est de contrôler si l'élève dispose des compétences attendues pour résoudre un problème plus ouvert où il peut recourir à des raisonnements divers prenant appui ou non sur telle connaissance ou telle capacité enseignée.

Le contexte, celui d'un prix, est familier aux élèves. La question n'induit pas de stratégie particulière. Dans ces conditions, les procédures mises en œuvre par les élèves sont très variées : propriétés de linéarité (élèves 14 et 4), propriété des écarts constants (qui est nécessaire, voir élève 21, mais non suffisante, voir élève 11), retour à l'unité (élève 15), recherche d'un coefficient de proportionnalité (élèves 10 et 23). On voit toute la richesse de la situation produite et utilisable lors d'une correction qui rendrait compte à la classe de l'ensemble des stratégies envisagées. On notera que, contrairement à ce que pourrait laisser croire la sélection opérée ici, le recours à un tableau est peu utilisé : seulement 20 % des élèves y ont recours.

Il n'y a pas dans cette deuxième question du problème de nouvelle information à prendre et donc la compétence C1 n'apparaît pas. En revanche, la question nécessite de bâtir un raisonnement en choisissant une procédure adaptée, ce qui justifie l'attribution de deux crédits sur la compétence C3. La mise en œuvre de raisonnements amènera immanquablement à exécuter certains calculs pris en compte par les deux crédits affectés à la compétence C2. Enfin, une justification étant demandée, la compétence C4 apparaît aussi pour deux crédits.

L'élève 21 mobilise correctement la procédure des écarts constants. Il est aidé en cela par le fait qu'une erreur de calcul commise en question 1)a) l'amène à montrer que les écarts n'étant pas constants dans son cas, il ne peut y avoir situation de proportionnalité. Il y a donc cohérence du raisonnement avec la question précédente et les crédits ont été attribués en totalité. Ce n'est pas le cas pour l'élève 11 qui ne mène pas le raisonnement à son terme. Sa réponse prouve que le prix est fonction affine de la distance. Pour aller plus loin, et assurer que la fonction est en fait linéaire, il faudrait ajouter le point origine dans le tableau.

L'élève 15 se réfère manifestement à un prix unitaire mais sa réponse n'est pas totalement explicite et, en particulier, rien n'atteste qu'il a véritablement calculé les trois prix unitaires pour les identifier.

L'élève 10 échoue dans une tentative d'utiliser un coefficient de proportionnalité. L'élève 23 y parvient mieux en calculant trois quotients qu'il identifie. Le recours en cette occasion à des valeurs approchées pour prouver des égalités de nombres est bien sûr incorrect sur le fond. Néanmoins, dans cette situation particulière et contextualisée, il a été jugé recevable. On notera que cet élève fait aussi apparaître une propriété de linéarité dans son tableau, propriété à laquelle il ne fait pas référence dans sa réponse rédigée.

Question 2) – Analyse de quelques réponses d'élèves

Non, le prix n'est pas toujours proportionnel à la distance car si je parcours 10 km je paye 15€, alors que si je parcours 20 km je paye 25€ au lieu de 30.

Élève 4	
C1	1
C2	1
C3	2
C4	2

Ce n'est toujours proportionnel car pour 1 km on paie 1€ et 10 km on paie 15€

$1 \times 10 = 10$
$1 \times 10 \neq 15$

Élève 24	
C1	1
C2	1
C3	2
C4	1

Non, le prix n'est pas toujours proportionelle.
Car :

+5 +5

5	10	15
5	~~10~~ 15	~~15~~ 20

+10 +5.

c'est faux !

Élève 10	
C1	1
C2	1
C3	2
C4	1

le prix est toujours proportionnel a la distance dans son tarif parce-que :
7,5 Km pour 10€ = 0,75 € par Km
15 Km pour 20€ = 0,75 € par Km
22,5 Km pour 30€ = 0,75 € par Km

Élève 15	
C1	0
C2	1
C3	0
C4	2

Commentaire :

Cette question nécessite une prise d'initiative et une prise de recul par rapport aux deux questions précédentes. Un raisonnement à l'aide d'un contre-exemple est attendu. La compétence C2 est donc fortement mobilisée. L'élève a également une nouvelle occasion de montrer qu'il a compris le mode de calcul du tarif du taxi, ce qui explique la présence d'un crédit pour la compétence C1.

Les élèves 4, 24 et 10 prennent bien l'initiative de rechercher un ou plusieurs contre-exemples qu'ils utilisent de diverses manières : par linéarité pour les deux premiers, par les écarts constants pour le dernier. On notera aussi que les élèves 24 et 10 utilisent mal l'adjectif proportionnel ce qui les prive d'un crédit sur la compétence C4.

Le dernier élève pour sa part ne s'extrait pas des trois exemples étudiés dans les deux questions précédentes. Il ne calcule donc aucun nouveau prix ce qui explique son absence de crédit sur la compétence C1. Mais surtout, il n'effectue pas le raisonnement attendu et il n'obtient donc aucun crédit sur la compétence C3 qui était l'enjeu principal de la question.