RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION

Mots clés
Raisonnement – Démonstration, preuve – Compétences : raisonner, chercher, communiquer – Différenciation – Trace écrite

Intentions majeures

Au-delà de son intérêt majeur dans la formation des futurs scientifiques, le raisonnement mathématique est un axe important de la formation du citoyen. Il permet de comprendre ce qu'est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique, de développer l'esprit critique, de former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l'information.

Selon le rapport Villani-Torossian[1] :

« Il est important qu'un citoyen soit capable d'opérer une écoute active et critique face à un discours qui lui est tenu, que ce soit dans un cadre professionnel, politique, ou autre. Ainsi, se familiariser avec la démarche de la preuve mathématique est un moyen d'apprendre à décomposer un raisonnement en arguments, à déceler d'éventuelles failles ou erreurs, à ne pas confondre l'hypothèse et ses conséquences ou l'ordre logique qui s'y réfère, voire à déceler la substitution d'une causalité à une corrélation pour justifier un argument peu étayé scientifiquement. »

Ce rapport réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et recommande de redonner une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Le programme de mathématiques de la seconde générale et technologique[2] prend en compte cette recommandation :

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

[1] https://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf
[2] https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

Du collège à la seconde

En classe de seconde, l'enseignement des mathématiques doit, en tenant compte de la diversité du public et de l'hétérogénéité des niveaux, viser trois objectifs :

- poursuivre la formation du citoyen commencée dans le cadre du socle commun ;
- assurer une solide formation aux futurs scientifiques sans décourager les autres ;
- éclairer les élèves sur l'intérêt de faire des mathématiques en première pour servir un grand nombre de projets d'études.

Le travail sur le raisonnement et la démonstration en seconde s'appuie sur celui effectué au cycle 4, tel qu'il est décrit dans le préambule du programme de mathématiques[3] :

*« La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées[…]. Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle).»*

Ce document prolonge des documents antérieurs, auxquels on pourra utilement se reporter :

- ressources pour le cycle 4 (mars 2016) sur la compétence « Raisonner »[4] ;
- ressources pour le collège (juin 2009 et réédité en mars 2016) « Raisonnement et démonstration »[5] ;
- ressources pour la classe de seconde (juillet 2009) « Notations et raisonnement mathématiques »[6].

Bien que ces deux derniers aient été écrits pour des programmes antérieurs, ils conservent leur intérêt. Il est notamment intéressant de reprendre la distinction qu'on y trouve entre raisonnement et démonstration : le raisonnement est une forme de cheminement plus ou moins complexe pouvant comprendre recherche, découverte, conjecture, production d'une preuve peut-être partielle ; la démonstration est une forme de communication d'une preuve aboutie, qui repose sur des résultats acquis antérieurement et sur les règles de la logique.

Cette distinction peut être analysée du point de vue des six compétences mathématiques[7], et, plus précisément de trois d'entre elles : raisonner, chercher, communiquer.

[3] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/4/Cycle_4_programme_consolide_1038204.pdf
[4] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf
[5] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf
[6] http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf
[7] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/90/0/Competences_mathematiques_Lycee_282900.pdf

Raisonner pour chercher, raisonner pour démontrer

Dans une phase de recherche, le raisonnement inclut des formes heuristiques telles que l'essai-erreur, la recherche de conjectures par :

- raisonnement inductif : conjecturer une proposition générale à partir de la vérification de cas particuliers ;
- raisonnement abductif : sachant que A implique B et voulant démontrer B, on peut être amené à conjecturer A.

Mentionnons aussi la preuve sur un exemple générique (démonstration sur un cas susceptible d'être adaptée au cas général), la « preuve sans mots » (justification sur une figure peu ou non commentée).

Dans une phase de démonstration, on utilise le raisonnement déductif qui peut se présenter sous diverses formes : raisonnement par implication, par équivalence, par l'absurde, par disjonction de cas, etc. La mise en forme de la démonstration s'appuie sur les compétences « raisonner » et « communiquer ».

Le raisonnement intervient ainsi dans ces activités diverses (chercher et conjecturer, affirmer et démontrer) dont la valeur et l'intérêt sont à mettre en évidence. Il importe aussi que l'élève apprenne à les distinguer clairement : une conjecture n'est pas un théorème, un raisonnement inductif n'est pas déductif, A implique B ne signifie pas B implique A, une hypothèse n'est pas une inclusion.

Ainsi, l'élève doit être encouragé à chercher, à juger avec lucidité les résultats qu'il obtient, à reconnaître comme tel un argument incomplet, à éviter les affirmations non étayées.

Clarifier et faire évoluer les pratiques

En premier lieu, il est nécessaire de préparer le terrain avant d'aborder certaines démonstrations du programme. Cela demande d'abord de s'appuyer sur des approches heuristiques, de manipuler et de verbaliser avant d'abstraire, comme il est décliné dans le rapport Villani-Torossian. Cela requiert ensuite de susciter chez les élèves une motivation pour la preuve mathématique ; diverses approches peuvent construire et affermir cette motivation :

- préparer le terrain en installant les prérequis voulus et en motivant la nécessité de prouver, de démontrer ;
- proposer des trompe-l'œil (activités destinées à déjouer des intuitions erronées) afin de montrer les limites de l'intuition ou de la vision ;
- trouver une accroche en posant un problème que les élèves ne savent pas résoudre avec les outils connus ;
- poser des questions ouvertes, engendrer le doute et débattre autour de controverses ;
- traiter des situations particulières pour motiver l'étude de cas généraux.

Il importe également :

- de préciser le contrat vis-à-vis des démonstrations du programme, qui n'ont pas vocation à être évaluées ; toutefois, les formes de raisonnement mises en jeu, après une certaine pratique, peuvent être mobilisées dans d'autres situations simples, en formation ou en évaluation ;
- de proposer des scénarios variés prenant en compte la diversité des élèves et d'adapter les preuves à ceux ne maîtrisant pas les outils antérieurement étudiés, tels l'usage du calcul littéral ;
- d'éviter d'encombrer de nouvelles démonstrations assez longues par d'autres antérieurement étudiées, que l'on peut alors considérer comme « évidentes » ;
- d'éviter une technicité excessive, notamment dans l'usage du calcul littéral.

Quelques pistes pour différencier

Des démonstrations différentes

Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours.

Des démonstrations en plusieurs niveaux de détail

Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :

- niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
- niveau 2 : démontrer chaque étape du plan (avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun) ;
- niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive.

Là encore, l'élève, qui autoévalue sa propre aptitude de compréhension, peut choisir le niveau de détail pour la démonstration qu'il note dans son cahier de cours.

Commencer une démonstration avec un exemple générique

Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement n'entache pas une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général.

Attendus pour tous

Pour engager tous les élèves, on peut développer uniquement le niveau 1 d'une démonstration, en dégageant le plan et les idées générales. Pour évaluer les élèves les plus fragiles, il est possible de déroger au principe ci-avant évoqué en adoptant le « contrat de confiance », qui consiste à poser une démonstration choisie dans une courte liste préalablement étudiée.

Approfondissements possibles

Pour certains élèves, par exemple ceux ayant un projet d'études scientifiques, on peut proposer des pistes d'approfondissement.

Plan du document

La suite du document illustre les considérations précédentes sur plusieurs des démonstrations mentionnées dans le programme de seconde, choisies parmi les plus riches, les plus délicates à aborder ou les plus significatives. Dans la diversité des démonstrations proposées, l'accent est mis sur des preuves visuelles lorsqu'il en existe. Les deux dernières rubriques du document sont consacrées à des exemples d'intervention du raisonnement par l'absurde et du raisonnement par disjonction de cas, en continuité avec le collège, dans les démonstrations du programme ou dans quelques exercices.

Pistes pour quelques démonstrations du programme

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Objectifs de formation

- Mettre en place ou revoir le principe du raisonnement par l'absurde.
- Mobiliser la définition d'un nombre décimal : quotient d'un entier par une puissance de dix.

Prérequis, motivation

- Les élèves retrouvent les formes décimales exactes de $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, et $\frac{k}{5}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Le professeur réactive et précise la définition d'un rationnel, puis celle d'un décimal.
- Les élèves obtiennent des valeurs décimales approchées de rationnels non décimaux avec l'algorithme de la division posée, comme par exemple avec $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{k}{7}$, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Le professeur fait observer qu'un reste partiel répété permet de conclure à la périodicité des décimales, puisqu'alors les quotients et restes partiels suivants vont aussi se répéter.
- La question se pose : « l'affichage de la calculatrice permet-il de conclure ? ». Les cas de $\frac{1}{65\,536}$, qui est décimal mais ne se voit pas dans l'affichage, ou de $\frac{1}{97}$, qui n'est pas décimal mais sans périodicité visible, peuvent alimenter le débat. On peut aussi envisager le cas du décimal $0{,}12345\ 12345\ 12345\ 12$: comment est-il affiché par la calculatrice ?
- Le professeur peut alors faire observer qu'une périodicité visible des premières décimales ne permet pas de conclure à la périodicité des autres.

Différentes démonstrations possibles

1. Avec l'algorithme de la division posée, les élèves remarquent que le reste 1 se répète, ce qui permet de conclure. En effet, les quotients successifs seront toujours égaux à 3 et les restes égaux à 1.
2. Le professeur présente le principe du raisonnement par l'absurde, en guidant plus ou moins la démonstration suivante. On suppose par l'absurde qu'il existe deux entiers A et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{A}{10^n}$. On en déduit que $10^n = 3A$, donc que 10^n est multiple de 3. La décomposition de 10^n en facteurs premiers fournit alors une contradiction.

Pistes de différenciation

La démonstration 1 est élémentaire et permet de travailler l'écriture décimale, mais ne met pas en jeu le raisonnement par l'absurde. On peut cependant le faire apparaître en supposant par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est décimal et en raisonnant sur le dernier chiffre de son écriture décimale et de son produit par 3.

Approfondissements possibles

- Étudier la périodicité du développement décimal d'autres rationnels non décimaux.
- Retrouver l'écriture fractionnaire de rationnels à partir d'un développement décimal périodique.
- Observer des curiosités, telles que les développements périodiques de $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$, etc.

Compétences transférables

Le principe du raisonnement par l'absurde doit être dégagé. Il se retrouve dans une autre démonstration du programme : l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Le nombre $\frac{1}{3}$ fournit un exemple de développement décimal illimité, notion offrant une approche de celle de nombre réel.

Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Objectifs de formation

- Mettre en œuvre le principe du raisonnement par l'absurde.
- Mobiliser la définition d'un nombre rationnel : quotient de deux entiers, qui peut se mettre sous forme irréductible.
- Prendre conscience de l'existence de nombres non rationnels.
- Utiliser la définition de la racine carrée.

Prérequis, motivation

- Les élèves démontrent que le carré d'un nombre impair est impair. Ils en déduisent que si un carré est pair, alors le nombre est pair, par l'absurde. Ce résultat est utile dans la démonstration 1.
- Le professeur propose un trompe-l'œil : dessiner un carré de côté 12 cm et mesurer la diagonale. On trouve à peu près 17 cm. L'écart, inférieur à 0,3 mm, n'est pas décelable à l'œil. D'où la question, sans calculatrice : $\sqrt{2}$ est-il égal à $\frac{17}{12}$? Sur le carré dessiné, le professeur incite les élèves à mentionner par un codage les propriétés géométriques résultant de la symétrie, ce qui sera utile dans la démonstration 3.
- Avec calculatrice, la question est sans intérêt, mais peut être déplacée en utilisant l'écriture fractionnaire du décimal affiché par la calculatrice.
- Le professeur peut alors préparer le terrain en amont, par un jeu de questions ou de défis :
  - « Est-il possible que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$? »
  - « Trouver une fraction proche de $\sqrt{2}$. »
  - « Trouver une fraction plus proche de $\sqrt{2}$ que $\frac{17}{12}$. »
  - « Qui peut dans la classe trouver la fraction la plus proche de $\sqrt{2}$? »

Dès que les élèves se sont approprié le problème, le professeur peut envisager de démontrer que $\sqrt{2} \neq \frac{17}{12}$ en utilisant le fait qu'un nombre et son carré sont de même parité, ce qui constitue un élément de la démonstration 1 ci-après.

Différentes démonstrations possibles

Le professeur peut dans un premier temps exposer le principe du raisonnement par l'absurde : on pose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible. On essaie d'aboutir à une contradiction. On remarque d'abord que l'hypothèse implique $p^2 = 2q^2$.

1. On raisonne avec la parité : l'égalité $p^2 = 2q^2$ implique que p^2 est pair, ce qui implique que p est pair (voir le premier prérequis) ; donc $p = 2p'$ avec p' entier ; on en tire $4p'^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2p'^2$, ce qui permet de déduire que q est pair lui aussi. Contradiction.
2. On raisonne sur le chiffre des unités par disjonction de cas, en examinant les différentes possibilités pour le chiffre des unités de p, puis de q.

   Les chiffres des unités possibles de p^2 sont 0, 1, 4, 5, 6, 9, ceux de $2q^2$ sont 0, 2 ou 8.

   La seule possibilité commune est 0, ce qui se produit lorsque le chiffre des unités de p est 0 et celui de q est 0 ou 5. Donc p et q sont tous deux multiples de 5. Contradiction.

3. On représente le problème dans le registre géométrique : le plus petit triangle isocèle rectangle dont les côtés ont des longueurs entières est d'hypoténuse p et le côté de l'angle droit est de longueur q (triangle ABC de la figure 1).

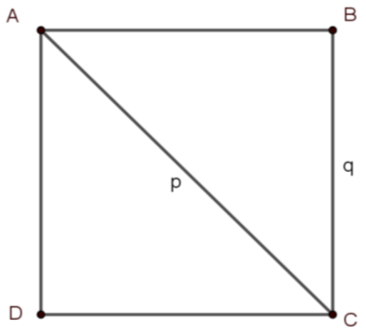


Figure 1

En repliant le côté $[\mathrm{BC}]$ sur la diagonale $[\mathrm{AC}]$, B coïncide avec F. Alors le triangle AFE est isocèle et rectangle car l'angle en F est droit par symétrie et l'angle en A mesure 45°. Ses dimensions sont inférieures à celles de ABC (Figure 2). Son petit côté a pour longueur $p-q$, qui est entier. Comme $\mathrm{BE}=\mathrm{EF}=p-q$, son hypoténuse a pour longueur $2q-p$, qui est entier également.

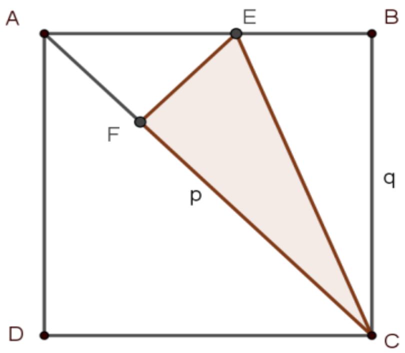


Figure 2

Pistes de différenciation

- Proposer une des trois preuves, au choix, en donnant l'idée. Les élèves consignent dans leur cahier celle qui leur convient le mieux.
- Tous les élèves peuvent s'approprier le raisonnement par l'absurde et se contenter du plan d'une des démonstrations (niveau 1).
- Le niveau 1 (plan) La structure de la démonstration peut se formaliser ainsi, en dégageant le principe du raisonnement par l'absurde :
  - supposer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ;
  - déduire une relation $p^2 = 2q^2$, où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux ;
  - déduire des propriétés de p et q par l'une des trois méthodes ;
  - aboutir à une contradiction.

Approfondissements possibles

- Étudier si $\sqrt{3}$ est rationnel ou non, ou $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc.
  Remarque : lorsque n n'est pas un carré, la première démonstration permet de démontrer que $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel, avec la décomposition en facteurs premiers et la divisibilité.
- L'égalité $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ implique facilement : $\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Cette égalité peut servir à prouver à nouveau que $\sqrt{2}\neq\frac{17}{12}$, par l'absurde. En effet, elle permet de déduire que $\frac{17}{12}=\frac{41}{29}$, ce qui conduit aisément à une contradiction.

Par ailleurs, partant de l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$, elle fournit des encadrements fractionnaires de $\sqrt{2}$ de plus en plus fins. Ainsi, à la première étape, l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$ permet de déduire successivement que $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$, puis $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{3}{2}$, soit $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

On obtient successivement :

étape 1 : $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ (amplitude $< 0{,}2$) ;

étape 2 : $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{10}{7}$ (amplitude $< 0{,}03$) ;

étape 3 : $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$ (amplitude $< 0{,}005$) ;

étape 4 : $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{58}{41}$ (amplitude $< 0{,}000\ 9$).

Les fractions à chaque étape peuvent s'obtenir à l'aide d'un algorithme intéressant à étudier.

Compétences transférables
Le principe du raisonnement par l'absurde doit être dégagé.
La définition d'un nombre rationnel peut être mobilisée pour d'autres problèmes de rationalité (voir les approfondissements ci-avant), avec utilisation de la forme irréductible.
Le passage au carré : il est à retenir pour le traitement des questions de racine carrée. Voir d'autres démonstrations du programme faisant intervenir la racine carrée.

Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est un multiple de a

Objectifs de formation

- Utiliser le calcul littéral pour démontrer un résultat général.
- Mobiliser la définition d'un multiple de a sous la forme ka, avec k entier.

Prérequis, motivation

- Le professeur réactive la notion de multiple et diviseur, par exemple en proposant le jeu de Juniper Green[8] puis en formalisant les définitions.
- Il réactive la forme générale d'un multiple de 7 sous la forme $7k$, avec k entier. Pour simplifier, on peut se limiter à k entier naturel.
- Il fait observer aux élèves des listes de multiples (de 3, de 7…), par exemple sur un tableur, et leur fait conjecturer la propriété de la somme, puis de la différence de deux multiples.

Différentes démonstrations possibles dans le cas $a = 7$

1. Avec le calcul littéral : deux multiples de 7 s'écrivent sous la forme $7m$ et $7n$, avec m et n entiers naturels ; leur somme s'écrit $7(m+n)$ et $m+n$ est encore un entier naturel. D'où le résultat.
2. Lier la propriété que l'on veut démontrer à la fonction linéaire $x \mapsto 7x$ ou, plus simplement, à la manipulation d'un tableau de proportionnalité dont le coefficient multiplicateur est 7. On sait que l'on peut additionner ou soustraire des colonnes dans un tel tableau. D'où le résultat.
3. On peut visualiser l'utilisation de la distributivité avec des aires.

Pistes de différenciation

- Le niveau 1 de la démonstration peut consister à dégager le plan suivant :
  - exprimer la forme générale d'un multiple de 7 sous la forme $7m$;
  - poser l'expression littérale de la somme deux multiples de 7 ;
  - exprimer cette somme sous la forme $7 \times (\dots)$.
- Pour tous les élèves, on peut donner la démonstration dans le cas $a = 7$ et demander de la produire pour une autre valeur de l'entier a.

Approfondissements possibles

Autres problèmes relatifs aux multiples et diviseurs, pouvant se démontrer à l'aide du calcul littéral :

- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. (Possible disjonction de cas.)
- Quelles familles d'entiers sont stables par sommation : nombres pairs, impairs, carrés… ?
- Généralisation de la proposition avec la somme de deux multiples de a, où a est un entier quelconque.

> **Compétences transférables**
> L'écriture générique d'un multiple de a, qui est utile dans de nombreux problèmes d'arithmétique est mise en évidence.

[8] https://fr.wikipedia.org/wiki/Juniper_Green_(jeu)

Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Objectifs de formation

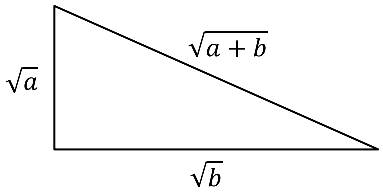
- Conforter les propriétés des racines carrées, en distinguant le produit et la somme.
- Traiter un problème de racine carrée par passage au carré.

Prérequis, motivation

- Le professeur réactive le sens de variation des fonctions « carré » et « racine carrée » (pour la démonstration 1), ainsi que l'inégalité triangulaire (pour la démonstration 2).
- Partant de la propriété sur le produit $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, le professeur interroge sur la somme : est-il vrai que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? Un débat peut être organisé, qui permette d'éclaircir la question des quantificateurs implicites dans la question, puis de rappeler que l'on valide une propriété universelle par une démonstration générale et qu'on l'invalide à l'aide d'un contre-exemple. Une observation des valeurs sur un tableur peut servir de point de départ.
- Ils comparent $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour des valeurs numériques : $a = 4$ et $b = 9$; $a = 7$ et $b = 9$. Ils conjecturent une propriété générale sur la comparaison.

Différentes démonstrations possibles

1) Passage au carré et démonstration par équivalence : tous les nombres étant strictement positifs, l'inégalité $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ équivaut à celle des carrés $a + b < \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$,soit encore, en simplifiant, à $0 < 2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Cette dernière égalité est vraie, donc pour tous a et b strictement positifs, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



2) On géométrise le problème (figure ci-contre) : si $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, alors $\sqrt{a+b}$ est la longueur de l'hypoténuse. On conclut avec l'inégalité triangulaire.

Pistes de différenciation

- Pour tous les élèves, on peut se contenter du niveau 1, selon le plan suivant :
  - comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés ; la propriété sous-jacente, liée au sens de variation des fonctions carré et racine carrée, peut ne pas être mentionnée ;
  - on calcule leurs carrés, en appliquant la définition des racines carrées et l'identité remarquable relative au carré d'une somme ;
  - on conclut, en remarquant qu'il y a un terme positif de plus dans la deuxième expression.
- Raisonner sur des valeurs particulières ($a = 3$ et $b = 7$), avec l'une ou l'autre des preuves.

Approfondissements possibles

- Pour $x > 1$, comparer $\sqrt{x+1}$ et $\sqrt{x} + 1$; pour $x > 0$, comparer $\sqrt{1+x^2}$ et $1 + x$.
- Défis numériques utilisant la propriété. Exemple : comparer $\sqrt{1{,}000\,000\,000\,001}$ et $1{,}000\,001$.

Compétences transférables

Le passage au carré dans un problème de racine carrée est la propriété essentielle à retenir.
Le recours à un exemple numérique pour éprouver une propriété que l'on croit vraie est à préconiser, par exemple pour réfuter l'égalité $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul

Objectifs de formation

- Introduire la notion de déterminant de deux vecteurs, et lui donner du sens.
- Utiliser le déterminant dans les questions de colinéarité.

Prérequis, motivation

- Le professeur consolide les automatismes liés à la colinéarité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées, sous forme de questions flash.

  Exemple : avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$, les élèves doivent rapidement donner l'égalité $\vec{v} = -3\vec{u}$.

- Le professeur propose des trompe-l'œil sur la colinéarité (les coordonnées prises dans la suite de Fibonacci en livrent facilement).

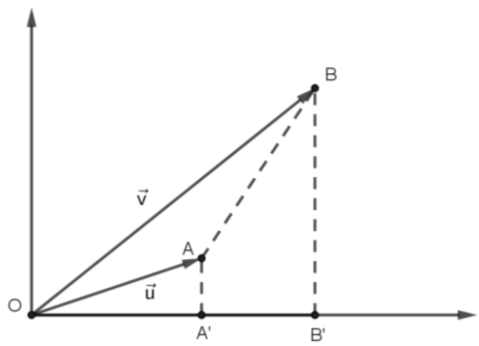
  Exemples : avec $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}13\\21\end{pmatrix}$; avec $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\34\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}34\\55\end{pmatrix}$; etc.

- Le professeur donne un sens géométrique au déterminant, dans une base orthonormée, en mettant en place une activité pour les élèves.

  On définit d'abord le déterminant $xy' - yx'$ des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

  On considère les points $\mathrm{A}(x, y)$ et $\mathrm{B}(x', y')$ de sorte que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

  L'activité se limite au cas de la figure ci-dessous : $0 < x < x'$, $0 < y < y'$ et $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$.



Avec les notations de la figure :

Aire (triangle OAB) = aire (triangle $\mathrm{OBB'}$) − aire (triangle $\mathrm{OAA'}$) − aire (trapèze $\mathrm{ABB'A'}$).

Cela s'écrit : aire (triangle OAB) $= \frac{1}{2}x'y' - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(y + y') \times (x' - x) = \frac{1}{2}(xy' - yx')$.

Ainsi le déterminant $xy' - yx'$ est égal au double de l'aire du triangle, donc à l'aire du parallélogramme bâti sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques. Il est intéressant de faire le lien entre les inégalités $0 < x < x'$, $0 < y < y'$ et $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$ et la figure. L'inégalité $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$ est liée aux pentes des droites OA et OB et faire remarquer que si elle est retournée, le déterminant est égal à l'opposé de l'aire du parallélogramme bâti sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Dans le cas général, l'aire de ce parallélogramme est égale à $|xy' - yx'|$.

Différentes démonstrations possibles

On se donne deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans une base orthonormée[9] et on considère leur déterminant $xy' - yx'$.

1. Avec la définition de la colinéarité

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on distingue deux cas, selon que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \neq \vec{0}$:

- si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $x = y = 0$ et dans ce cas $xy' - yx' = 0$;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$; il en découle que $x' = kx$ et $y' = ky$, et donc $xy' - yx' = k(xy - yx\ ) = 0$.

Réciproquement, si $y' - yx' = 0$, alors soit $\vec{u} = \vec{0}$ (et dans ce cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) soit l'un des deux nombres, x ou y, n'est pas nul. Supposons par exemple que $x \neq 0$; alors $y' = \frac{x'}{x}y$ et on vérifie aisément que $\vec{v} = \frac{x'}{x}\vec{u}$.

Remarques. On raisonne par double implication ; par ailleurs, dans la partie directe comme dans la réciproque, on applique une disjonction en deux cas. On pourrait convenir de se limiter à des vecteurs non nuls, ce qui simplifié la démonstration en évitant la disjonction de cas, mais a l'inconvénient d'écarter le cas, utile pour l'application aux équations de droite, où l'un des vecteurs est nul.

2. Variante de la démonstration 1 en exprimant la colinéarité, lorsque les deux vecteurs sont non nuls, par le fait que le tableau ci-après est un tableau de proportionnalité.

x	x'
y	y'

3. Avec l'interprétation géométrique précédente, en admettant le résultat général.

On peut raisonner par équivalences : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si le parallélogramme bâti sur les deux vecteurs est aplati ; cela équivaut encore à ce que son aire soit nulle, soit encore $xy' - yx' = 0$.

Pistes de différenciation

- Pour les deux démonstrations on peut raisonner sur un exemple générique pour un seul des deux vecteurs par exemple $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{2}{5}$. Dans ce cas, pour la démonstration 1, on conserve la double implication, mais il n'y a plus de disjonction de cas.
- Pour les élèves ayant des difficultés sur le calcul littéral, on peut vérifier la condition de colinéarité uniquement sur des exemples numériques et montrer qu'elle fonctionne sur un dessin. Dans ce cas, il n'y a pas de démonstration générale.
- Si l'on a mis en place l'interprétation géométrique, la démonstration 3 est plus simple ; de plus cette interprétation donne un sens au déterminant, en admettant que les formules d'aires, établies avec l'utilisation de l'orthogonalité, sont valables dans toute base.

Approfondissements possibles

- Problèmes d'alignement et de parallélisme.

[9] Le raisonnement est valable dans une base quelconque. Nous nous en tenons à une base orthonormée, seul type de base mentionné dans le programme.

- Équations de droites.
- L'aire d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières est un entier ou un demi-entier ; l'aire d'un parallélogramme dont les sommets ont des coordonnées entières est un entier.
- Calcul d'aires (triangles, parallélogrammes).

Compétences transférables

L'utilisation du déterminant sera mobilisée à plusieurs reprises en géométrie repérée : exemples de colinéarité, problèmes d'alignement et de parallélisme, détermination d'une équation de droite. La démonstration 1 est la plus usuellement développée dans la pratique ; les compétences qu'elle mobilise doivent être mises en évidence car elles se transfèrent à d'autres situations. En l'occurrence, il s'agit du principe de raisonnement par double implication et de la disjonction de cas.

En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite

Objectifs de formation

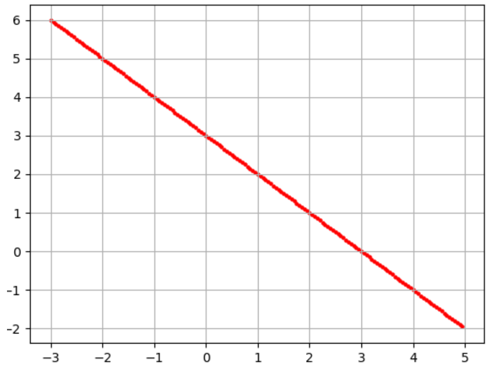
- Connaître la forme générale d'une équation de droite du plan $ax + by + c = 0$.
- Savoir reproduire la démonstration générale utilisant le déterminant dans les cas particuliers.
- Pratiquer un raisonnement par équivalences.

Prérequis, motivation

- Le professeur vérifie en amont les prérequis indispensables sur le repérage : placement et lecture de points, lecture du coefficient directeur d'une droite (AB) lorsque A et B ont des coordonnées entières, calcul de ce coefficient dans des cas simples.
- Les élèves procèdent à la lecture intuitive « d'équations » de droites parallèles aux axes de coordonnées et placent de telles droites.
- Le professeur donne en activité l'étude détaillée d'un exemple, en partant de la définition géométrique d'une droite :
  a) Soit D la droite passant par le point $\mathrm{A}(-1{,}1)$ et dirigée par par $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$. Montrer en utilisant le déterminant que si un point $\mathrm{M}(x, y)$ appartient à D, alors $2x + 5y - 3 = 0$.
  b) Réciproquement, on cherche à déterminer la nature de l'ensemble E de tous les points $\mathrm{M}(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $2x + 5y - 3 = 0$. D'après le a), on a $D \subset E$.
  c) On considère le programme Python suivant, et ce qu'il affiche lorsqu'on le lance.

```
from matplotlib.pyplot import*
from numpy import*

def ensemble(m,p):
    for k in arange(-3,5,0.05):
        scatter(k,m*k+p,color='red',s=5)
    grid()
    show()
```



  Sachant que l'instruction scatter (x,y,color='red',s=5) construit un point rouge de taille 5 de coordonnées (x, y), expliquer le résultat affiché par le programme, puis conjecturer la nature de l'ensemble E.
  d) Vérifier que le point $\mathrm{A}(-1{,}1)$ appartient à E.
  e) Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point quelconque de E. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires. En déduire que $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}$ et conclure.

Différentes démonstrations possibles

Il est proposé une démonstration générale de deux résultats utiles, toutes deux utilisant le déterminant. Dans les deux cas, l'objectif est de mettre en œuvre un raisonnement par équivalences.

Résultat 1

Dans un repère du plan, toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration du résultat 1

On considère la droite D passant par $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{M}(x, y) \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs est nul (propriété étudiée antérieurement et fournissant une équivalence).

Cette condition s'écrit $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$ ou encore $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_0 + \alpha y_0$. On remarque que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Résultat 2

Soit a, b, c trois réels avec a et b non tous les deux nuls. L'ensemble E des points $\mathrm{M}(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite. De plus, un vecteur directeur de cette droite est le vecteur de coordonnées $(-b, a)$.

Démonstration du résultat 2

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point de l'ensemble E, c'est-à-dire un point M dont les coordonnées (x, y) vérifient $ax + by + c = 0$. Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(-b, a)$.

Supposons $a \neq 0$. On considère le point de E d'ordonnée 0. Il existe bien, il s'agit du point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ avec $x_0 = -\frac{c}{a}$ et $y_0 = 0$. On a donc : $ax_0 + by_0 + c = 0$. On en déduit que M appartient à E si et seulement si $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$, soit $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, et donc si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}, \vec{u}\right) = 0$.

Ainsi E est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire la droite D passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Si a est nul (on retrouve un raisonnement par disjonction des cas), alors b est non nul et l'on considère le point M_0 de E d'abscisse nulle. Le raisonnement est ensuite inchangé.

Pistes de différenciation

Dans la pratique, si la droite est donnée par des éléments géométriques, les élèves auront à mettre en œuvre la méthode utilisant le déterminant avec des exemples numériques ; on peut donc se contenter, avec les élèves rebutés par l'aspect théorique des démonstrations générales, d'exiger une démonstration sur des exemples. Tous les élèves pourront sur ces exemples souscrire aux objectifs d'apprentissages, qui sont d'utiliser le déterminant et de conduire un raisonnement par équivalences. Ainsi par exemple :

- pour la droite passant par $\mathrm{A}(3,5)$ et dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, l'élève donne directement l'équation $x = 3$;
- pour la droite D passant par $\mathrm{A}(3,5)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, l'élève écrit des équivalences :

$$\mathrm{M}(x, y) \in D \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow 2 \times (x-3) - 1 \times (y-5) = 0. \text{ Etc.}$$

Si la droite est donnée par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec des valeurs numériques de a, b, c, l'élève doit, selon le résultat 2, reconnaître une droite, en identifier un vecteur directeur et un point, afin de donner les éléments géométriques de la droite et la tracer. Dans ce cas, il n'aura pas à mettre en œuvre ni l'utilisation du déterminant ni le raisonnement par équivalences.

Remarque

L'emploi du raisonnement par équivalences dans les démonstrations 1 et 2 est possible en se basant sur la condition de colinéarité, qui est nécessaire et suffisante. À ce niveau, le professeur peut dégager le sens de ces mots et les rattacher aux implications correspondantes.

Dans bien d'autres cas, on montre en géométrie l'égalité de deux ensembles en procédant par double inclusion. Voir ci-après les derniers approfondissements et l'encadré « Compétences transférables ».

Approfondissements possibles

- Applications du programme : problèmes de parallélisme et d'intersection de droites, d'alignement de points.
- Problèmes d'intersection de droites en utilisant la géométrie analytique.

Dans les exemples qui suivent, il s'agit d'établir l'égalité de deux ensembles géométriques. On peut procéder par double inclusion ou, si lorsque la situation d'y prête, par double inclusion.

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses. Une variante de ce type de problème : montrer que la parabole d'équation $y = x^2$ est l'ensemble des points équidistants du point $\mathrm{F}\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et de la droite D d'équation $y = -\frac{1}{4}$ (commencer par observer que la distance entre un point $\mathrm{M}(x, y)$ et la droite D est égale à $|y + \frac{1}{4}|$).
- Représentation sur des exemples, de parties du plan décrites par d'autres égalités sur les coordonnées ou d'inégalités sur les coordonnées.
- Régionnement du plan par une droite.

Compétences transférables

Raisonnement par équivalences

Le raisonnement par équivalences doit être mis en évidence. Le professeur peut mettre en lumière la nécessité de contrôler que l'équivalence est vraie à chaque étape du raisonnement, en vérifiant au besoin, à part, que les deux implications sont réalisées sans rajouter une hypothèse dans l'un ou l'autre des membres de l'équivalence.

Le professeur dégage le schéma théorique, pour deux propositions P et Q : $P \Leftrightarrow Q$ signifie que $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Raisonnement par double implication, égalité par double inclusion

Dans bien des cas, le raisonnement par équivalences s'avère délicat, et il est plus sûr et plus simple de traiter séparément les deux implications. Ainsi, en géométrie, on montre fréquemment l'égalité de deux ensembles A et B en raisonnant par double inclusion. Cela consiste à prouver que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Ce raisonnement se retrouve dans de nombreux problèmes ou démonstrations.

Quelques exemples en seconde : résolution d'une équation, d'une inéquation ou d'un système (on montre par des déductions que toute solution appartient à un certain ensemble, puis on vérifie que tout élément de cet ensemble est solution) ; résolution de problèmes géométriques présentés ci-avant dans les approfondissements.

Quelques exemples en première : ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$; équation d'un cercle ; etc.

Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$

Objectifs de formation

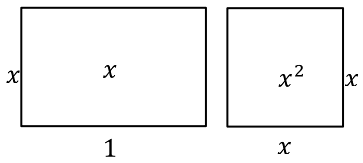
- Réactiver le lien entre position relative des courbes et comparaison des fonctions.
- Réactiver la méthode de comparaison en étudiant le signe de la différence.

Prérequis, motivation

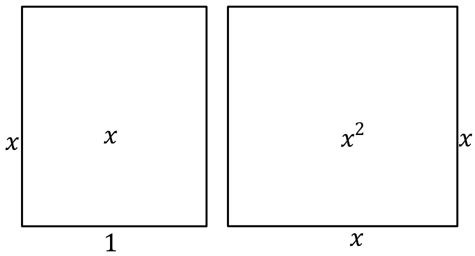
- Le professeur propose un Vrai/Faux en trompe-l'œil avec l'affirmation « le carré d'un nombre est plus grand que ce nombre » ou « le cube d'un nombre est plus grand que son carré ».
- Les élèves répondent à un quiz numérique : dans chaque cas, quel est le plus grand des deux nombres A et B ?
    a) $A = 1{,}000\,000\,000\,01$ et $B = 1{,}000\,000\,000\,01^2$;
    b) $A = 1{,}000\,000\,000\,01^3$ et $B = 1{,}000\,000\,000\,01^2$;
    c) $A = 0{,}999\,999\,999\,99$ et $B = 0{,}999\,999\,999\,99^2$;
    d) $A = 0{,}999\,999\,999\,99^3$ et $B = 0{,}999\,999\,999\,99^2$.
- En utilisant la calculatrice ou un grapheur, conjecturer la position relative des trois courbes.
- Autre conjecture, en observant un tableau de valeurs au pas $0{,}1$ des trois fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$, pour x compris entre 0 et 3.

Différentes démonstrations possibles

- Le professeur explique la « méthode de la différence » pour comparer deux nombres. Une preuve consiste donc à étudier le signe des expressions $x^2 - x$ et $x^3 - x^2$ grâce à une factorisation et, si besoin, un tableau de signes.
- Une démonstration visuelle en comparant :
    - les aires de deux rectangles pour comparer x et x^2

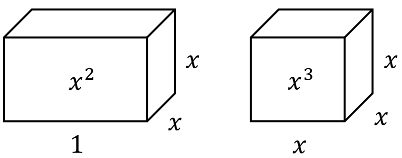


Cas $0 \leq x \leq 1$

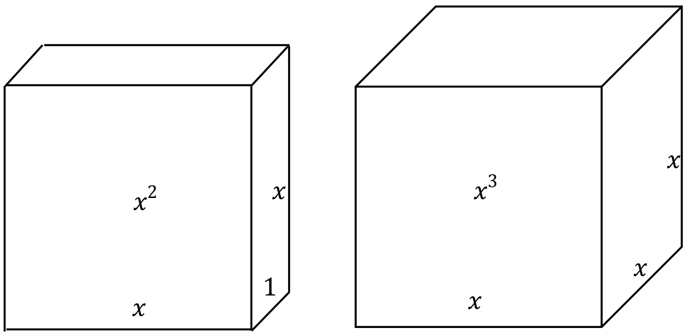


Cas $1 \leq x$

    - les volumes de deux cubes pour comparer x^2 et x^3



Cas $x \leq 1$



Cas $1 \leq x$

Pistes de différenciation

Avec la démonstration 1, on peut pour tous les élèves se contenter du niveau 1, selon le plan suivant :

- comparer deux nombres revient à étudier le signe de la différence ;
- les différences s'écrivent $x^2 - x = x(x-1)$ et $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$;
- chaque différence est du même signe que $x - 1$;
- conclusion.

Approfondissements possibles

- Tracer les courbes représentatives des trois fonctions sur $[0\,;2]$ et, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, effectuer des zooms successifs autour du point d'abscisse 1.
- Comparaison des fonctions précédentes avec la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
- Autres problèmes de comparaison de fonctions se ramenant à étudier le signe de la différence.

Compétences transférables

Méthode de la différence

La « méthode de la différence » pour comparer deux fonctions est mise en œuvre tout au long des études, dans la pratique des mathématiques.

Images mentales

La visualisation graphique induite par la comparaison des fonctions « carré », « inverse », « racine carrée » donne une image mentale plus précise des courbes représentatives de ces fonctions, et peut de ce fait être mobilisée dans de nombreux problèmes. L'automatisme correspondant peut être développé dans des activités flash.

Variations des fonctions « carré », « inverse », « racine carrée »

Objectifs de formation

- Pratiquer avec les fonctions usuelles « carré », « inverse » et « racine carrée » les méthodes dégagées pour l'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle.
- Réactiver la méthode de comparaison de deux expressions en étudiant le signe de la différence.

Prérequis, motivation

- Le professeur rappelle le sens de la croissance (décroissance) d'une fonction sur un intervalle :
  - en termes numériques : les images sont rangées dans le même ordre que les valeurs de la variable ;
  - en termes graphiques : toute « corde » (AB) de la représentation graphique, avec A et B d'abscisses choisies dans l'intervalle, a une pente positive ;
  - par une représentation dans un tableau de variation ; à cette occasion, on peut faire apparaître l'importance de se placer sur un intervalle.
- Le professeur rappelle la méthode permettant d'établir numériquement la croissance sur un intervalle.
- Les égalités $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b-a}{ab}$ et $\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) = b - a$ peuvent être mobilisées dans une démonstration ; si c'est le cas, il convient de les remettre en place en amont (questions flash, exercice recherché en classe ou préparé en travail personnel).
- Les élèves conjecturent graphiquement le sens de variation d'après les « cordes » des courbes représentatives.
- Le professeur propose un trompe-l'œil (fonction ayant l'air croissante (ou décroissante) sur un intervalle d'après sa représentation graphique, mais qui ne l'est pas).
  Exemple : $f(x) = x^3 - 2{,}001x^2 + 1{,}001$.

Différentes démonstrations possibles

Concernant les fonctions « carré » et « inverse », les démonstrations calculatoires peuvent se conduire uniquement sur $[0,+\infty[$; on conclut avec la parité.

1. Démonstrations numériques, utilisant la définition de la croissance (décroissance).

   Le plan est : on se donne deux nombres a et b quelconques dans $[0,+\infty[$ (ou $]0,+\infty[$ pour la fonction « inverse ») ; on suppose que $a < b$; on compare $f(a)$ et $f(b)$ en évaluant le signe de la différence.

2. Preuves visuelles

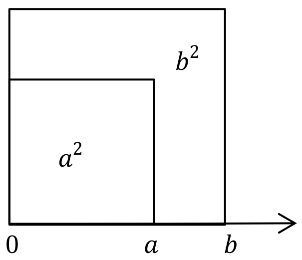


Figure 1

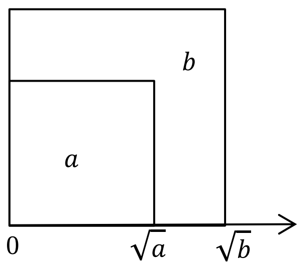


Figure 2

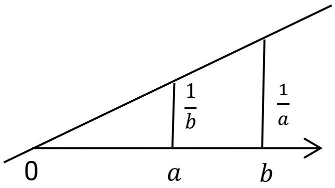
   a) Fonction « carré »
   L'aire d'un carré croît avec son côté (figure 1 ci-dessus).

   b) Fonction « racine carrée »

   La méthode utilisée pour la fonction « carré » fonctionne en modifiant les abscisses en $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ et en faisant d'abord varier le carré (figure 2 ci-dessus). Il est d'ailleurs possible de déduire la croissance de la fonction « racine carrée » de celle de la « fonction carré ».

c) Fonction « inverse »

Pour a et b strictement positifs choisis, on représente la droite passant par l'origine, de pente $\frac{1}{ab}$. Les points de cette droite d'abscisses a et b ont pour ordonnées $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{a}$.



Remarque : la figure, anecdotique et un peu artificielle, doit être donnée par le professeur. Cette preuve ne vise qu'à donner une image mentale pouvant s'avérer plus convaincante pour certains élèves.

Pistes de différenciation

La démonstration classique peut paraître ardue aux élèves ne maîtrisant pas le calcul littéral ou à ceux n'ayant pas assimilé la définition d'une fonction croissante sur un intervalle. Cette dernière comporte en effet plusieurs difficultés didactiques :

- l'emploi de lettres ; ces lettres ont au départ le statut de « variables » mais, dans le développement calculatoire, changent de statut pour devenir des « indéterminées » ;
- la présence de quantificateurs, plus ou moins implicites selon la formulation ;
- la structure elle-même du raisonnement qui repose non pas sur l'obtention d'une inégalité, mais sur une implication : prouver qu'une inégalité en implique une autre ;
- le passage d'une inégalité au signe de la différence, bien que ce passage ne soit pas obligatoire.

C'est pourquoi, en l'absence d'exemples génériques dans ce cas, la différenciation peut reposer soit sur le simple plan de la démonstration (niveau 1, limité aux idées), soit sur une preuve intuitive (celle des cordes ou celles visuelles).

Approfondissements possibles

- Sens de variation de fonctions associées aux fonctions usuelles : $x \mapsto f(x) + k$, $x \mapsto f(x + k)$, $x \mapsto kf(x)$. Ces fonctions n'apparaissent pas en tant que telles en seconde et en première, mais peuvent donner matière à un approfondissement intéressant pour certains élèves.
- Introduction du taux d'accroissement entre deux réels a et b et interprétation graphique comme coefficient directeur de la corde (AB).

Compétences transférables

La méthode d'étude du sens de variation pratiquée en seconde est délicate. Son principe doit être dégagé car il donne du sens à la notion de croissance ou de décroissance ; cependant, sa mise en œuvre ne pourra pas être exigible de tous les élèves car elle est relativement technique. Cette limitation est sans dommage sur les futures formations scientifiques ou technologiques des élèves qui, en classe de première, utiliseront principalement le calcul différentiel pour étudier le sens de variation des fonctions.

Différents types de raisonnement

Voir aussi la ressource pour le cycle 4 sur la compétence « raisonner ».

Exemples d'intervention du raisonnement par l'absurde

Principe (dégagé par le professeur)

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse, c'est-à-dire que sa négation $(\text{non } P)$ est vraie ; on en déduit des conséquences qui aboutissent à une contradiction. Cela prouve que la proposition $(\text{non } P)$ ne peut pas être vraie, et donc que P est vraie.

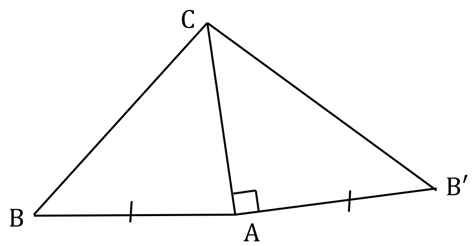
Exemples dans le programme du collège

- Le professeur peut revenir sur une proposition utilisée au collège[10] : dans un triangle ABC, si $\mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A. On raisonne par l'absurde. Si ABC était rectangle en A, on aurait $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ d'après le théorème de Pythagore : contradiction.

Démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore : voir aussi les ressources pour le collège « Raisonnement et démonstration »:

On suppose que $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Soit B' l'un des deux points de la perpendiculaire à (AC) passant par A tels que $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$.



Le triangle $\mathrm{AB'C}$ étant rectangle en A, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{B'C}^2 = \mathrm{AB'}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2.$$

On en déduit que $\mathrm{B'C} = \mathrm{BC}$.

On raisonne alors par l'absurde : supposons que le triangle ABC n'est pas rectangle en A ; cela implique que $\mathrm{B} \neq \mathrm{B}'$. Dans ce cas, l'égalité $\mathrm{B'C} = \mathrm{BC}$ montre que le point C appartient à la médiatrice de $[\mathrm{BB}']$, tout comme le point A, car $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ par construction. Ainsi (AC) est la médiatrice de BB', donc $(\mathrm{AC}) \perp (\mathrm{BB}')$. Cela montre que la droite (BB') est la perpendiculaire à (AC) passant par B', comme l'est aussi la droite (AB'). Donc les droites (BB') et (AB'), qui ont le point B' en commun, sont confondues ; donc $(\mathrm{AC}) \perp (\mathrm{AB})$. Contradiction.

- On peut également démontrer la réciproque du théorème de Thalès par l'absurde, à partir du théorème direct.
- On démontre qu'un tableau de nombres à deux lignes n'est pas un tableau de proportionnalité en raisonnant par l'absurde : s'il l'était, les différents quotients seraient égaux ; le fait d'exhiber deux quotients distincts constitue une contradiction.
- Exhiber un contre-exemple pour réfuter une proposition universelle peut être présenté sous forme de raisonnement par l'absurde.

---

[10] Il s'agit de la contraposée du théorème de Pythagore, mais cette notion n'est pas au programme de seconde.

Exemples dans les démonstrations du programme de seconde

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal (démonstration n° 2).
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices possibles en seconde

- Un automobiliste parcourt 30 km en 23 min sur un tronçon de route limité à 80 km/h. A-t-il respecté la limitation de vitesse tout le long du trajet ?
- Si n est un entier non carré, le nombre $\sqrt{n}$ est irrationnel. En seconde, on se limite à des valeurs numériques de l'entier n.
- Démontrer qu'il n'existe pas de plus petit décimal strictement positif.
- Démontrer qu'il n'existe pas de plus petit rationnel strictement positif.
- On se donne quatre nombres réels a, b, c, d tels que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$. Démontrer qu'il existe deux de ces nombres qui sont distants de moins de $\frac{1}{3}$.

Exemples d'intervention du raisonnement par disjonction de cas

Principe (dégagé par le professeur)

Pour démontrer une proposition P portant sur un ensemble d'objets (nombres, points…), on démontre la propriété sur des sous-ensembles formant un recouvrement de l'ensemble. Les sous-ensembles peuvent être disjoints (« disjonction »), mais ce n'est pas nécessaire.

Par exemple, soit P de la forme (A implique B), où A est une disjonction (A_1 ou A_2). La disjonction de cas consiste à montrer (A implique B) en montrant (A_1 implique B) et (A_2 implique B).

Un complément sera apporté sur ce type de raisonnement dans le document ressource sur le raisonnement et la démonstration pour la classe de première générale.

Exemples dans le programme du collège

- Il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est 2. On raisonne d'abord par l'absurde en supposant qu'il existe un tel décimal, puis par disjonction de cas sur le chiffre le plus à droite dans l'écriture décimale de ce nombre.

Exemples dans les démonstrations du programme de seconde

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal (deuxième piste de différenciation).
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel (démonstration n° 2).
- Propriétés des puissances. Pour a et b réels, m et n entiers relatifs :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \,;\, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (a \neq 0) \,;\, (a^m)^n = a^{m \times n} \,;\, a^m \times b^m = (a \times b)^m.$$

  On distingue plusieurs cas selon que m et n sont entiers naturels non nuls, nuls ou négatifs.

Exercices possibles en seconde

- Pour tout entier n, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier. On raisonne selon la parité de n.
- Le produit de trois entiers consécutifs est multiple de 6. On raisonne selon le reste dans la division de n par 3.
- Pour tout entier n, le nombre $n^5 - n$ est multiple de dix. (Cette propriété est citée par François Le Lionnais[11] (1901-1984) dans son livre Les nombres remarquables ; l'auteur dit que cette propriété lui a fait aimer les nombres lorsqu'il l'a découverte de lui-même à l'école primaire.) On raisonne selon le chiffre des unités.
- Théorème de l'angle inscrit : soit A, B, C trois points d'un cercle de centre O ; alors $\widehat{\mathrm{BOC}} = 2 \times \widehat{\mathrm{BAC}}$. On raisonne selon que O est sur un côté de l'angle inscrit, à l'intérieur ou à l'extérieur.
- Démontrer que si un entier est somme de deux carrés, alors son reste dans la division euclidienne par 4 est différent de 3. On raisonne selon le reste dans la division par 4.

[11] François Le Lionnais, ingénieur, chimiste, mathématicien épris de littérature, est considéré comme le fondateur de l'*Oulipo* (ouvroir de littérature potentielle). L'*Oulipo* est un groupe international de littéraires et de mathématiciens ayant mis en avant l'intérêt de contraintes comme stimuli dans le processus de création. Le mouvement a compté dans ses membres des écrivains tels que Raymond Queneau, Italo Calvino, Georges Perec, des mathématiciens comme Claude Berge ou Martin Gardner.