

**PROGRAMME ET CONTENUS DE  
L'ENSEIGNEMENT OPTIONNEL DE  
TERMINALE GÉNÉRALE :  
MATHÉMATIQUES  
COMPLÉMENTAIRES**

# Organisation du programme

Le programme s'organise en deux grands volets :

- Neuf thèmes d'étude
- Contenus et capacités attendues

**L'objectif de ce programme.**

Comment mettre en œuvre son enseignement ?

# Thèmes d'étude

- Modèles définis par une fonction d'une variable
- Modèles d'évolution
- Approche historique de la fonction logarithme
- Calculs d'aires
- Répartition des richesses, inégalités
- Inférence bayésienne
- Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
- Temps d'attente
- Corrélation et causalité

# Approche nouvelle.

Les compétences travaillées

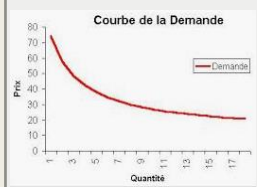
# Compétences mathématiques



**Chercher, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels**



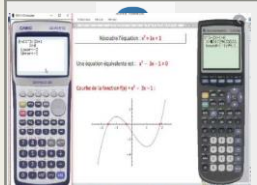
**Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle**



**Représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre**



**Raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective**



**Calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes**



**Communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche**

# Analyse .

- **Histoire des mathématiques**
- **Suites numériques, modèles discrets**
- **Fonctions** : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique
  - Théorème des valeurs intermédiaires (admis).
  - Fonction logarithme népérien
  - Fonction dérivée de  $x \mapsto f(ax+b)$ ,  $x \mapsto \ln(u(x))$ ,  $x \mapsto (u(x))^2$  .
- **Primitives et équations différentielles**
  - Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle  $y' = f$
  - Équation différentielle  $y' = ay + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des réels ; allure des courbes.
- **Fonctions convexes**
- **Probabilités et statistique**
  - Lois discrètes - Loi géométrique - Lois à densité
  - Statistiques à deux variables quantitatives
    - Nuage de points. Point moyen. Ajustement affine .
    - Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation.
- **Algorithmique et programmation - Vocabulaire ensembliste et logique**

# Présentation par thèmes d'étude

# Modèles définis par une fonction d'une variable

## Situation 3

### L'évolution du taux d'équipement en ordinateur

#### Objectif

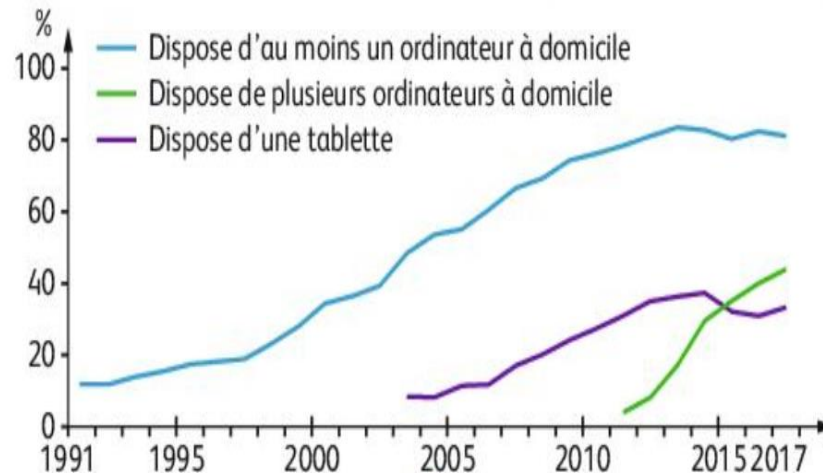
Introduire la notion de convexité et de rythme de croissance.

Le graphique ci-contre donne le taux d'équipement en ordinateur et en tablette en France de 1991 à 2017.

On admet que l'on peut modéliser le taux d'équipement en ordinateur à partir de 2003 par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 0,0006x^3 - 0,0162x^2 + 0,1504x + 0,3145$$

où  $x$  représente le nombre d'années depuis 2003.



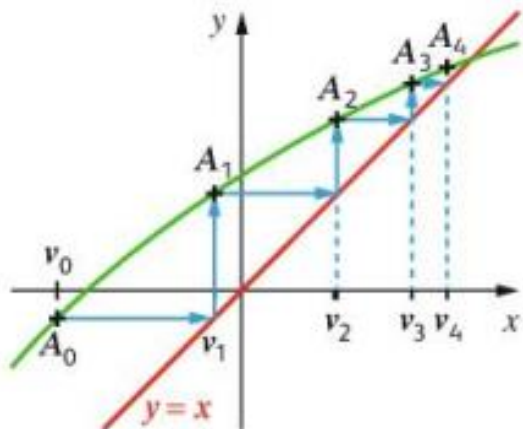
## Contenus associés

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires.
- Fonction dérivée.
- Sens de variation.
- Extremums.
- Fonctions de référence.
- Convexité.
- Statistique à deux variables

Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales.



# Modèles d'évolution



## Objectif

Découvrir et résoudre une équation différentielle de la forme  $y' = ay$  dans le contexte de la pharmacocinétique.

## Info

Lorsque qu'une fonction  $f$  vérifie, pour tout réel  $t \geq 0$ , la relation  $(E): f'(t) = -0,1f(t)$ , on dit que  $f$  est solution, sur  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle :

$$(E): y' = -0,1y$$

## Contenus associés

- Suites récurrentes.
- Suites géométriques.
- Fonction exponentielle.
- Suites arithmético-géométriques.
- Équation différentielle  $y' = ay + b$ .
- Limites.

Il s'agit ici de modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, à l'aide de suites ou de fonctions d'une variable réelle.

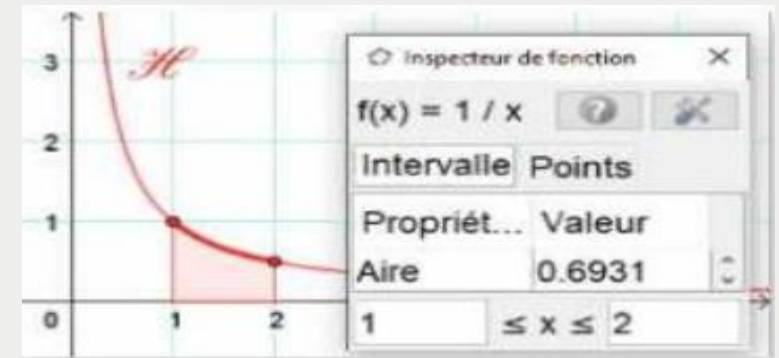
# Approche historique de la fonction logarithme

## Situation 2 Quadrature de l'hyperbole

Les déterminations d'aire sont des problèmes mathématiques très anciens. On s'intéresse ici à la **quadrature de l'hyperbole** : la détermination de l'aire du domaine délimité par l'hyperbole et une de ses asymptotes.

On note  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ , de courbe représentative  $\mathcal{H}$  et, pour tout réel  $a \geq 1$ ,  $\mathcal{A}(a)$  l'aire du domaine compris entre  $\mathcal{H}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = a$ .

Il s'agit de montrer qu'un objet mathématique, ici la fonction logarithme népérien, peut être étudié selon divers points de vue.



## Contenus associés

- Suites arithmétiques,
- suites géométriques.
- Fonction logarithme.
- Calcul intégral.

# Calculs d'aires

## Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes

permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d'approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l'aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral.

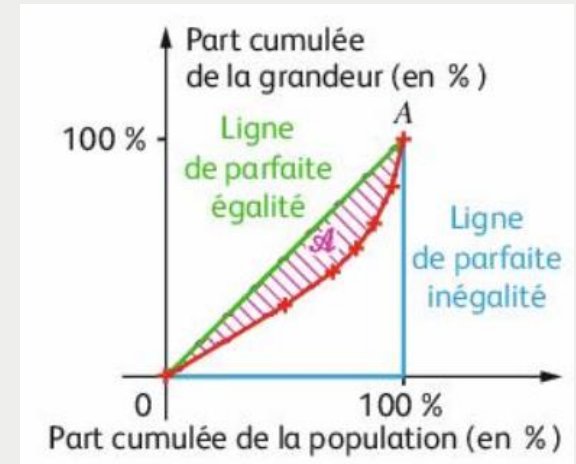
## Contenus associés

- **Limites de suites.**
- **Intégrale d'une fonction continue et positive.**
- **Primitives.**
- **Continuité et dérivation.**
- **Probabilités.**

# Répartition des richesses, inégalités

Plus les inégalités sont importantes, plus la courbe de Lorenz s'éloigne du segment  $[OA]$  et plus l'indice de Gini est élevé et se rapproche de 1.

L'étude de la répartition de richesses dans la population d'un pays, des salaires dans une entreprise, etc., et la comparaison des différentes répartitions sont des occasions de réinvestir des connaissances antérieures de **statistique descriptive** et de construire de **nouveaux outils d'analyse faisant intervenir les fonctions d'une variable** (notamment des fonctions de répartition) et le calcul intégral.



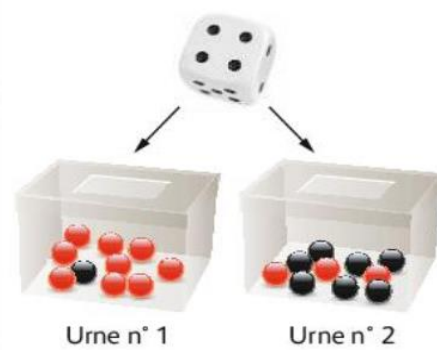
## Contenus associés

- **Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile  $D_9/D_1$ ).**
- **Fonctions d'une variable**
- **Convexité.**
- **Calcul intégral**

# Inférence bayésienne

## Objectif

Utiliser la notion de probabilité conditionnelle pour résoudre un problème du type « de quelle urne vient cette boule ? » (probabilité inverse).



Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice, etc. où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la **formule de Bayes** pour l'inversion des conditionnements

## Objectif

Mobiliser la formule de Bayes dans un contexte médical.

## Contenus associés

- Probabilités conditionnelles,
- inversion du conditionnement,
- formule de Bayes. Étude de fonction

# Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

On dispose de deux pièces dont une seule est truquée :



**1** Individuellement, réfléchir à un protocole permettant d'identifier la pièce truquée.

Ce thème vise à illustrer le **modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes** et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu.

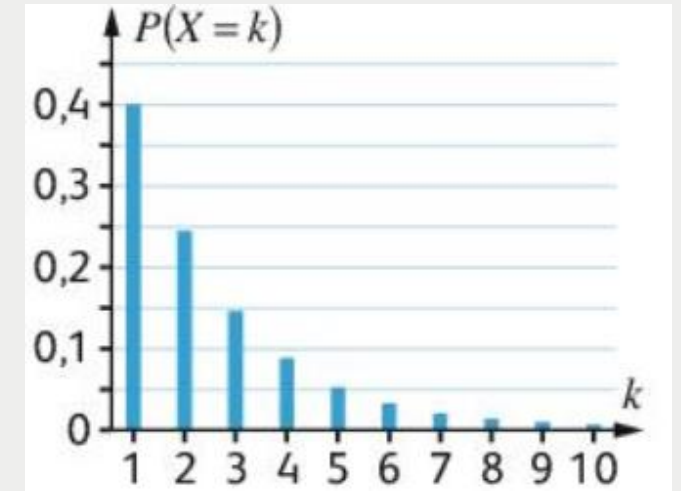
## Contenus associés

- Épreuve et loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale.
- Lois uniformes discrètes et continues sur  $[0,1]$ .

# Temps d'attente

**Situation** : On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de Succès  $p$ , où  $p \in ]0; 1[$ . On répète cette épreuve de façon identique et indépendante les unes des autres jusqu'à l'**apparition du premier Succès**. Le nombre d'épreuves n'est donc pas fixé à l'avance.  
On note  $X$  la variable aléatoire qui, à cette répétition d'épreuves, associe le rang du premier Succès.

Certains phénomènes physiques (temps de désintégration d'un atome radioactif) ou biologiques (durée de vie de certains organismes) possèdent la propriété d'absence de mémoire. **Leur modélisation mathématique repose sur l'utilisation des lois géométriques et exponentielles selon que le temps est considéré comme discret ou continu.**



## Contenus associés

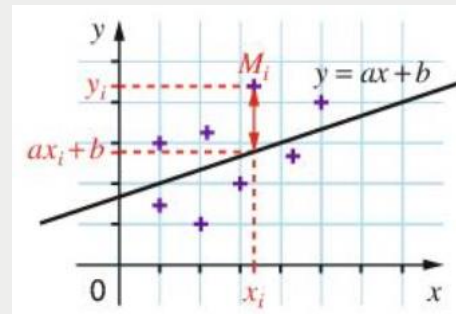
- Lois à densité.
- Loi géométrique,
- Loi exponentielle.
- Absence de mémoire,
- discrète ou continue.

# Corrélation et causalité

- Comme  $\bar{y} = a\bar{x} + b$ , le point moyen  $G$  du nuage appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .
- En utilisant la **covariance**  $\text{cov}(X; Y)$ , égale à  $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ , et la **variance**  $V(X)$ , égale à  $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ , on a :  $a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{V(X)}$ .

À travers l'étude de séries statistiques à deux variables, l'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et finalement à distinguer corrélation et causalité.

C'est aussi l'occasion de travailler sur la droite de régression, et de faire percevoir le sens de l'expression « moindres carrés »



## Contenus associés

- Fonctions usuelles.
- Représentations graphiques.
- Minimum d'une fonction trinôme.
- Séries statistiques à deux variables



# Compléments

- Exemples d'exercices dans l'esprit du travail par thèmes.
- Exemples de manuels avec 2 approches différentes.

**Modèles définis par une fonction d'une variable** - Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales. **Exemple 1 de situation :**

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 2019. Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

### Partie I

Le tableau suivant donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Rang de l'année: $x_i$	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : $y_i$	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_{x_i})$  pour  $i$  entier variant de 0 à 4.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
  - a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
  - b. Déterminer l'équation  $y = ax + b$  de la droite (D) d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.
  - c. Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent.
  - d. En utilisant l'ajustement affine du 1), donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2027.

Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2023	2024	2025	2026	2027
Rang de l'année: $x_i$	4	5	6	7	8
Nombre annule de véhicules vendus en milliers : $y_i$	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

- a. Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs. b. L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse. c. On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$ , pour  $i$  entier variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme  $y = e^{cx+d}$
- b. Déterminer les réels  $c$  et  $d$  pour que cette courbe passe par les points  $A(4; 131,2)$  et  $B(8; 76,1)$ . On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels.

## Partie II

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[4; 10]$  par :  $f(x) = e^{-0,136x+5,421}$ .

On suppose que  $f$  modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2023.

- Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[4; 10]$ .
- L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.
  - Résoudre algébriquement dans l'intervalle  $[4; 10]$  l'inéquation  $f(x) \leq 65$ .  
En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?
  - Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires.

**Modèles d'évolution** - Il s'agit ici de modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, à l'aide de suites ou de fonctions d'une variable réelle. **Exemple 2 de situation :**

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

**Les parties A et B sont indépendantes.**

### Partie A

Soit  $u_n$  le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année  $n$ .

On pose  $n = 0$  en 2005,  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

- Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 20]$ .
- En déduire que pour tout  $x \in [0 ; 20]$ ,  $f(x) \in [0 ; 10]$ .
- On donne en **annexe** la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .



## Partie B : un modèle continu

Soit  $g(x)$  le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année  $x$ .

On pose  $x = 0$  en 2005,  $g(0) = 1$  et  $g$  est une solution, qui ne s'annule pas sur  $[0 ; +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$(E) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction  $y$  qui ne s'annule pas sur  $[0 ; +\infty[$  et on pose  $z = \frac{1}{y}$ .

a. Montrer que  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $z$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad ; \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation  $(E_1)$  et en déduire les solutions de l'équation (E).

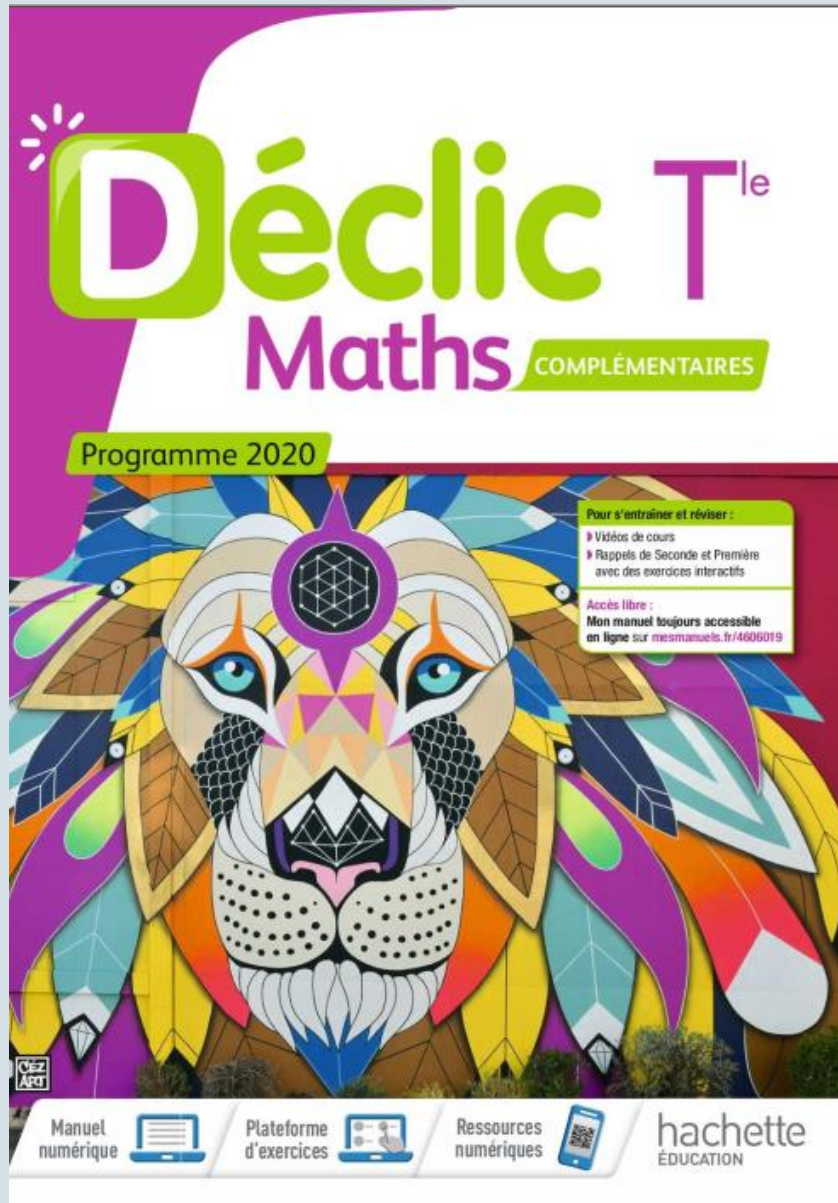
2. Montrer que  $g$  est définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ .

3. Étudier les variations de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

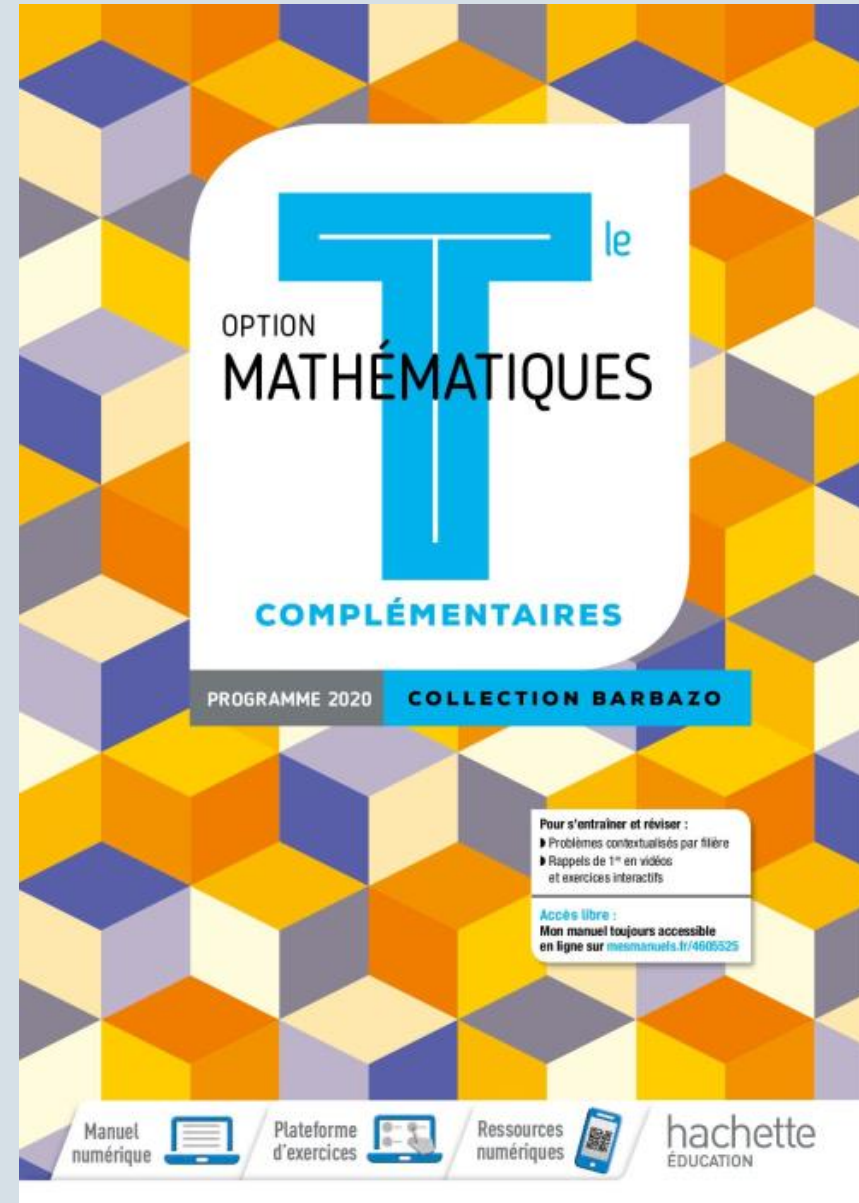
4. Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

## Approche par thèmes



## Approche par contenus



# Sitographie

**1<sup>ère</sup> : Sujets de E3C (Libre d'accès) :** [Bac Général Enseignements de spécialité Spécialité mathématiques E3c-2](#) [cliquez ici](#)

**Terminale :** **Manuels numériques consultables en ligne**

## Spécialité mathématiques

Indice maths – bordas : <https://fr.calameo.com/read/00495697949b196352063>

Le livre scolaire : <https://fr.calameo.com/read/000596729efdd44af7a7c?authid=P1QQmK1VcS5r>

MAGNARD – Sésamath : [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstsspe\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020)

Barbazo Maths : <https://fr.calameo.com/read/0048229533c3f405328b4>

## Option mathématique complémentaires:

Manuel Déclic : <https://fr.calameo.com/read/0048229535a5dfb57a397>

Indice maths – bordas : <https://fr.calameo.com/read/004956979cfe11db1d93c>

MAGNARD – Sésamath : [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstscomp\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstscomp_2020)

Barbazo Maths : <https://fr.calameo.com/books/00482295304d2782e474c>

## Option mathématiques expertes

Hachette éducation – Barbazo : <https://fr.calameo.com/books/004822953b9519a03ed95>

Le livre scolaire : <https://fr.calameo.com/read/0005967295d0b5d5c47f6?authid=nDfde6HMoRP5>

MAGNARD – Sésamath : [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstsexp\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsexp_2020)

Barbazo : Maths : <https://fr.calameo.com/read/004822953b9519a03ed95>