MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Académies de la Guadeloupe, de Guyane et de la Martinique

Mercredi 13 mars 2019 de 8 heures à 12 heures10

- Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

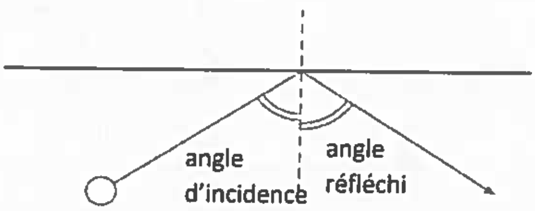
Chaque équipe rend une seule copie.

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Le Billard*) et 2 (*Une histoire de cubes*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Le Billard*) et 3 (*Un gros cube … des petits cubes*).

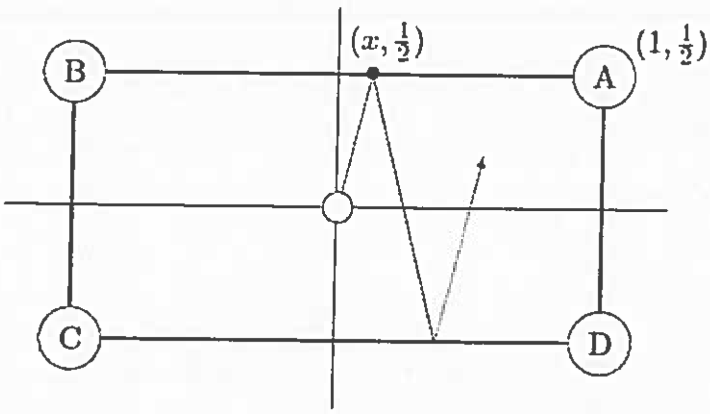
Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le Billard

Le but de ce problème est d'identifier les points des bandes d'un billard qu'on doit viser afin de faire rentrer une boule, initialement placée au centre, après un nombre n de rebonds, n entier, $n \geq 1$ donné. On supposera que les rebonds sont "parfaits" au sens où ils suivent la loi de Descartes en terme de réflexion : angle d'incidence égal à l'angle réfléchi.



On considère un billard de longueur 2 m et de largeur 1 m. On suppose que le billard ne possède que 4 trous, situés aux 4 coins. On place un repère au centre du billard, avec des axes parallèles aux cotés, appelés bandes. Ainsi, les 4 trous ont pour coordonnées $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ et sont notés respectivement A, B, C, et D.



Pour simplifier la situation, on va supposer que la première bande touchée sera la bande horizontale supérieure, correspondant donc au segment $[BA]$. De plus, on ne visera que la partie droite de cette bande, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées de la forme $(x; \frac{1}{2})$, avec $0 \leq x \leq 1$. Un tel x s'appellera visée : il s'agit donc de l'abscisse du premier rebond de la boule sur cette bande $[BA]$.

On dira que la boule est empochée en A, ou atteint A en n bandes, avec $n \geq 1$, lorsqu'elle finit par rentrer dans le trou A après n rebonds. On assimilera la boule et les trous à des points : la boule doit précisément se trouver à la position d'un trou pour être empochée. On supposera de plus que la boule continue sa course indéfiniment tant qu'elle ne rencontre pas de trou !

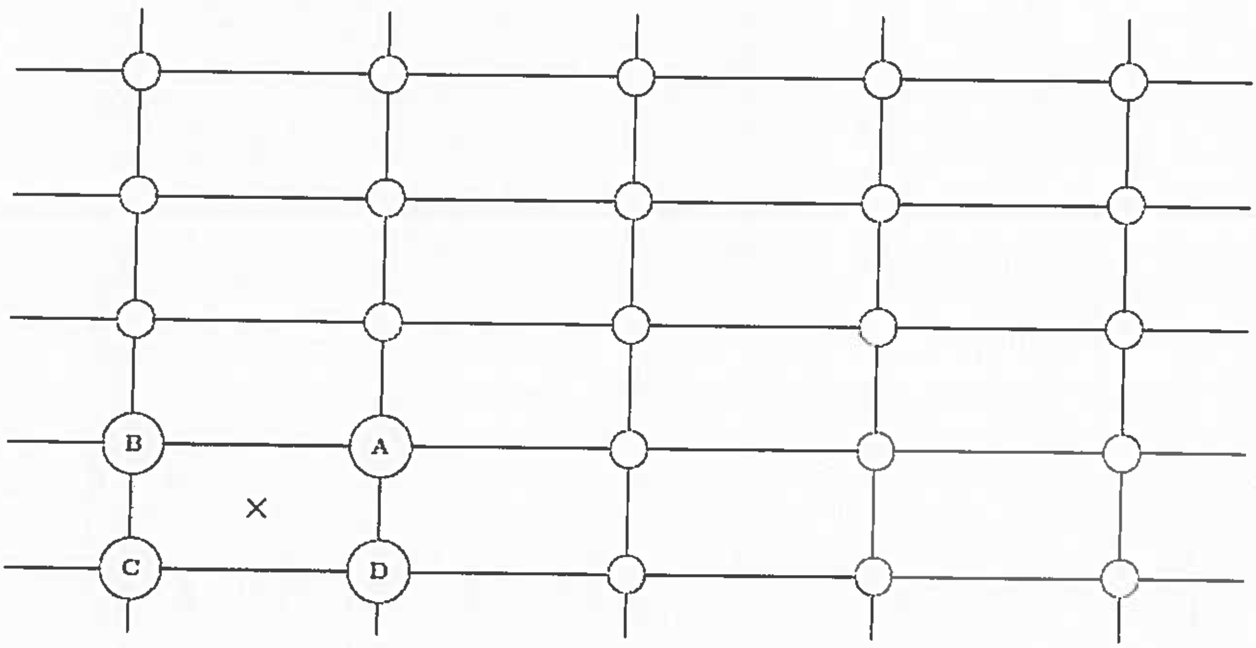
Quelques cas simples

1. On choisit la visée $x = \frac{1}{2}$. La boule va-t-elle être empochée ? Si oui, en combien de bandes ?
   Une figure précise pourra servir de justification.
2. Même question avec $x = \frac{1}{3}$
3. Déterminer une valeur x permettant d'empocher la boule en 2 bandes.
4. Proposer une formule pour x permettant d'empocher la boule en n bandes, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le trou, suivant la valeur de n, et illustrer cette proposition avec une figure, dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Utilisation des trous "virtuels"

Il est possible d'établir une démonstration de la formule proposée à la question précédente, et, plus généralement, trouver l'ensemble des valeurs de visée $x \in [0 ; 1]$ permettant d'empocher la boule en n bandes. Une jolie façon d'y parvenir est de considérer des trous "virtuels", images des trous du billard par des symétries axiales par rapports aux bandes.
On se contentera ici d'appliquer cette méthode à quelques cas particuliers.

5. On considère l'image D' du trou D par la symétrie orthogonale d'axe la bande horizontale supérieure. Expliquer pourquoi viser le trou virtuel D' permet d'atteindre D en une bande.
6. Suivant le même raisonnement, déterminer un trou "virtuel" A', image du trou A par une certaine symétrie, à préciser, permettant d'atteindre A en deux bandes, et expliquer comment on retrouve la valeur de x obtenue à la question 3.
7. Reproduire succinctement la figure suivante en indiquant à la place de chaque petit cercle laissé vide la lettre A, B, C, ou D précisant le trou virtuel qu'il représente.

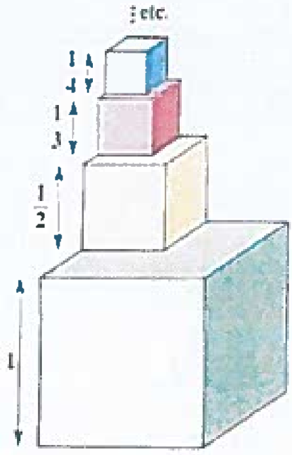


8. A l'aide du schéma précédent, déterminer la visée x (toujours sur la partie droite de la bande supérieure) permettant d'atteindre D en 5 bandes, et en touchant au moins une fois chacune des 4 bandes.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Une histoire de cubes

Le problème



Un artiste contemporain désire matérialiser sa vision originale de l'infini par une œuvre spatiale ainsi conçue:

- le moulage de cubes pleins, en matière plastique, d'arêtes successives (en mètre) :
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots ;$$
- le revêtement de la surface de tous les cubes construits par une couche de laque.
- l'empilement de tous ces cubes, par tailles décroissantes, dans une salle de musée.

L'artiste dispose d'un volume total de 2 m^3 de plastique (malléable à volonté) et d'une quantité de laque permettant de peindre une surface de 12 m^2 . D'autre part, la salle de musée à une hauteur de plafond de 8 mètres.

Il s'agit de déterminer si, avec ces contraintes, l'artiste pourra :

- mouler autant de cubes qu'il veut (*problème 1*)
- en peindre autant qu'il veut (*problème 2*)
- en empiler autant qu'il veut (*problème 3*)

Préliminaires

On note v_n, le volume total (en m^3) des n premiers cubes construits (ceux d'arêtes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$), s_n la somme de leurs aires (en m^2) et h_n, la hauteur (en m) de leur empilement.

1. Montrer que résoudre les trois problèmes se ramène à répondre aux trois questions :
   A-t-on $v_n \leq 2$? A-t-on $s_n \leq 12$? A-t-on $h_n \leq 8$?
2. Vérifier que l'artiste peut réaliser une œuvre comprenant 10 cubes.
3. L'artiste peut-il réaliser une œuvre comprenant 100 cubes ?

Résolution du problème

4. ***Résolution du problème 2***

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que :
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

c) Résoudre alors le *problème 2.*

5. ***Résolution du problème 1***

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:
$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$

b) En déduire que :
$$v_n \leq \frac{1}{6} s_n$$

c) Résoudre alors le *problème 1.*

6. *Résolution du problème 3*

a) Vérifier les inégalités :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{1}{2}$$

et plus généralement, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2}$$

b) En déduire que,

$$\text{si} \quad n=2^k \quad \text{alors} \quad h_n\geq\frac{3}{2}+\frac{k-1}{2}$$

c) Résoudre alors complètement le *problème 3*.

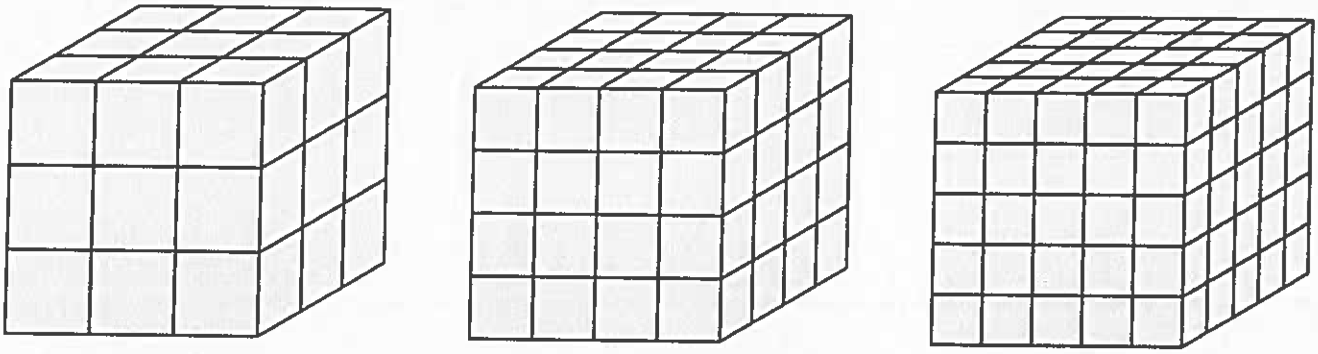
Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Un gros cube ... des petits cubes !

Présentation du problème et notations

On considère des cubes composés d'une matière blanche facile à découper. On peint les faces des cubes en gris et on laisse sécher. L'expérience consiste ensuite à découper les cubes en n^3 petits cubes de même taille avec n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2.

Par exemple, pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ on obtient les résultats suivants :



On peut donc avoir des petits cubes de 4 sortes différentes :

- Des cubes n'ayant aucune face peinte en gris. On note a_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant une seule face peinte en gris. On note b_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant exactement deux faces peintes en gris. On note c_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant exactement trois faces peintes en gris. On note d_n le nombre de ces cubes.

1. Combien de faces, d'arêtes et de sommets possède un cube ?
2. Compléter le tableau suivant (après l'avoir reproduit sur votre feuille) :

	a_n	b_n	c_n	d_n	$a_n + b_n + c_n + d_n$
$n = 2$					
$n = 3$					
$n = 4$					
$n = 5$					

3. En vous inspirant de la question 1., déterminer les expressions de a_n , b_n , c_n et d_n en fonction de n pour n quelconque.
4. Vérifier que : $a_n + b_n + c_n + d_n = n^3$.
5. En vous aidant de votre calculatrice, dites à partir de quelle valeur de n il y a plus de petits cubes n'ayant aucune face peinte en gris que de petits cubes ayant au moins une face peinte.