ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE
EXERCICE ZÉRO – proposition n°4

L’usage d’une calculatrice est autorisé.

Des instruments, des notes et des gammes (10 points sur 20)

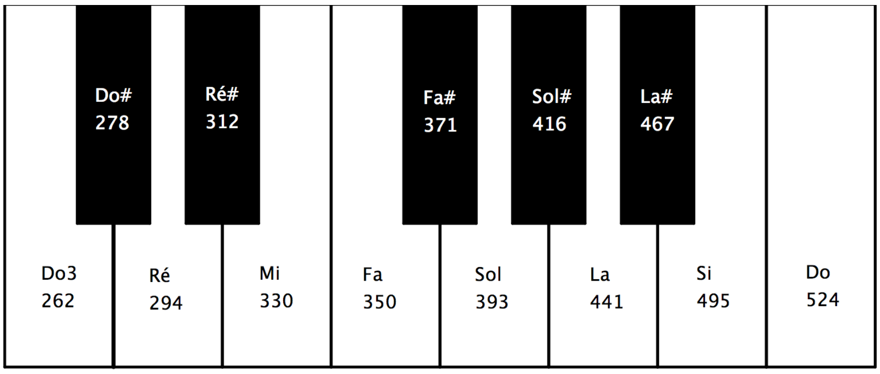
Les instruments de musique produisent des sons auxquels l’oreille humaine associe certaines caractéristiques : hauteur, timbre et intensité. La répartition des notes dans une gamme a été retenue pour qu’elles sonnent de manière harmonieuse les unes par rapport aux autres. La recherche de cette harmonie a conduit à différents types de gammes, des gammes dites de Pythagore aux gammes tempérées.

Le sujet est composé de deux parties largement indépendantes

Partie 1 : des instruments et des notes

Les cordes d’un piano vibrent lorsqu’elles sont frappées par de petits marteaux actionnés par les touches du clavier. Les sons produits par le piano résultent de ces vibrations.

Document 1 : notes associées aux touches d’un piano pour l’octave Do3 - Do4 et fréquences associées en hertz (Hz)



1- Calculer la fréquence associée au La4 située une octave au dessus du La3.

2- On s’intéresse aux sons produits par ce piano. Un système d'acquisition informatisé permet l'enregistrement et la visualisation des signaux associés à ces sons.

Document 2 : signaux enregistrés correspondant à des notes de musique jouées par un piano

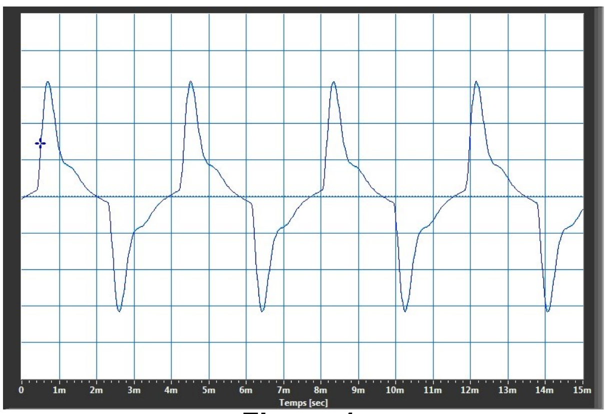


Figure 1
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

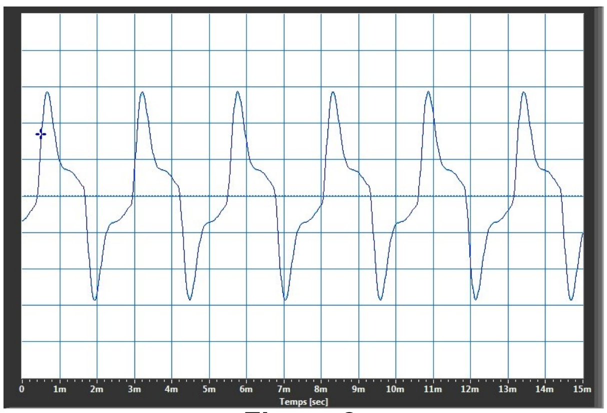


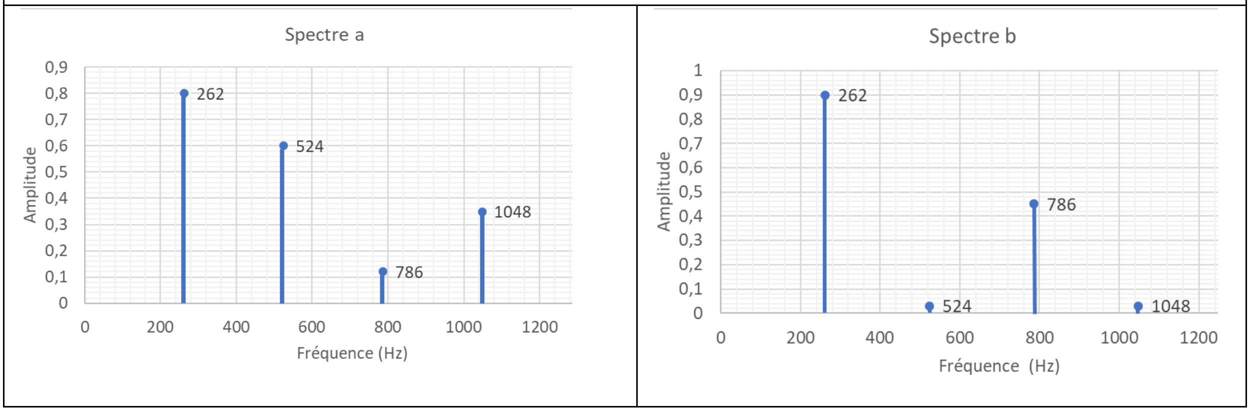
Figure 2
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

2-a- Justifier que les figures 1 et 2 correspondent à deux notes différentes.

2-b- Identifier les notes correspondantes aux figures 1 et 2.

3- L'analyse spectrale permet, après une acquisition informatisée et un traitement numérique, de révéler la « signature acoustique » d'un son en faisant apparaître l'amplitude de ses différentes composantes en fréquence.

Document 3 : Spectres de sons produits par deux instruments de musique (fréquence de chaque composante indiquée en hertz)



3-a- Ces deux sons ont-ils la même hauteur ? L'oreille humaine peut-elle les différencier ?

3-b- Le spectre a correspond à l'un des sons produit par un piano étudiés dans la question 2. Associer ce spectre à l'un des deux signaux du document 2.

Partie 2 : des notes et des gammes

La théorie musicale étant fondée sur des rapports de fréquences, on décide de simplifier les calculs en attribuant la valeur 1 (sans unité) à une fréquence choisie comme référence. Celle-ci correspond à une note de référence (par exemple 262 Hz pour le Do 3). On retrouve ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence.

La construction des gammes dites de Pythagore est basée sur le cycle des quintes : on part de la fréquence de valeur $f_0 = 1$. On construit une nouvelle fréquence, la quinte, en multipliant f_0 par $\frac{3}{2}$ .On réitère ce processus pour obtenir la quinte de la quinte, et ainsi de suite. À certaines étapes, le fait de multiplier par $\frac{3}{2}$ une fréquence f comprise entre 1 et 2 peut donner une fréquence supérieure ou égale à 2. On se propose de démontrer que, si on divise par 2 la valeur obtenue, on la ramène dans l'octave.

4- On suppose que $1 \leq f < 2$ et on raisonne par disjonction de cas :

- premier cas : $1 \leq f < \frac{4}{3}$. Montrer que $1 \leq \frac{3}{2} \times f < 2$
- deuxième cas : $\frac{4}{3} \leq f < 2$. Montrer que $2 \leq \frac{3}{2} \times f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} f < 2$

5- L'algorithme suivant permet de calculer les fréquences des notes successivement obtenues par ce processus jusqu'à ce qu'on retombe sur la fréquence initiale.

```
f ← 1
f ← 3/2 × f
n ← 1
Tant que  f ≠ 1 faire
    n ← n + 1
    f ← f × 3/2
    Si  f ≥ 2 alors  f ← f × 1/2
   Fin Si
Fin Tant que
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs des 12 premières quintes obtenues par cet algorithme. Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte comme quotients d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis par leurs valeurs décimales approchées au centième obtenues à l'aide de la calculatrice.

Numéro de la note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (fraction irréductible)	1	$\frac{3}{2}$				$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fréquence (valeur approchée à 10^{-2} près)	1	1,5				1,9	1,42	1,07		1,20	1,80	1,35	1,01

6- L'algorithme termine-t-il pour une valeur de n inférieure ou égale à 12 ?

7- Chacune des fréquences calculées est obtenue à partir de 1 par des multiplications successives par $\frac{3}{2}$ et éventuellement par $\frac{1}{2}$. Elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme $\frac{3^m}{2^n}$ où m et n sont des entiers non nuls.

7-a- Démontrer que l'égalité $\frac{3^m}{2^n} = 1$ est impossible.

7-b- Que peut-on en déduire pour l'algorithme proposé ci-dessus ?

8- D'après ce qui précède, le cycle des quintes ne « reboucle » jamais exactement sur la note de départ. En s'appuyant sur le tableau de la question 5, justifier le choix de 12 notes dans une gamme construite selon ce principe.