Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

Chapitre 11

Approcher l'astronomie mathématique en classe : un exemple d'usage d'éléments d'histoire des cosmologies chinoises et grecques

Nicolas Décamp
Cécile de Hosson
Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz (EA4434)

I. Introduction

« Pour quelle raison aucune ombre n'est visible au pied des obélisques à Syène (ville située sur le tropique du cancer) à midi au solstice d'été alors qu'au même moment des ombres sont visibles aux pieds des obélisques à Alexandrie (ville située plus au nord, sur le même méridien) ? ». Lorsque l'on demande à des élèves de cycle 3, de collège et même de lycée, de répondre à cette question en produisant un dessin, la plupart d'entre eux représente la propagation de la lumière du Soleil en utilisant des rayons divergents arrivant sur une Terre tantôt plate, tantôt ronde (Merle, 1985, Farges *et al.*, 2002, Feigenberg *et al.*, 2002, de Hosson et Décamp, 2011 ; voir Figure 1). La Figure 1 est prototypique de ce type de modélisation dans le cas où la courbure de la Terre est représentée.

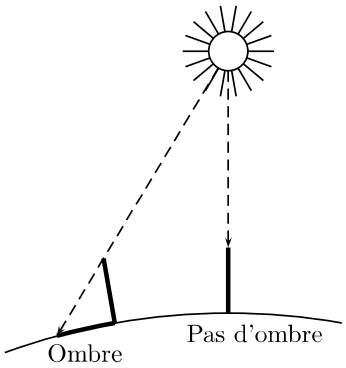


Figure 1. Dessin prototypique d'élèves (illustration: N. Décamp et C. de Hosson)

Cette modélisation « spontanée » de la propagation de la lumière du Soleil, imposée en grande partie par le format de la feuille de papier (Feigenberg, 2002) s'avère tout à fait performante : elle permet en effet d'expliquer pourquoi il n'y a pas d'ombre à un endroit et une ombre à un autre endroit de la Terre, et peut même être, dans une certaine mesure, considérée comme acceptable, car le Soleil n'est pas une source ponctuelle et n'est pas situé à l'infini (Décamp et de Hosson, 2011).

Lorsque cette situation entre dans la classe de science ou de mathématiques, c'est dans le contexte d'activités visant à exploiter avec les élèves la procédure qu'aurait imaginée et suivie Eratosthène (276-194 av. J.C.) pour calculer la longueur du méridien passant par Syène et Alexandrie (apparenté au périmètre de la Terre à l'équateur). Telle qu'elle se voit utilisée en contexte scolaire, cette procédure engage une géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil en lignes parallèles, géométrisation que l'on admet la plupart du temps, sans que ne soit réellement discutée ni travaillée la manière dont les élèves se représentent cette même propagation. Dans un article consacré aux difficultés d'élèves confrontés à la procédure dite d'Eratosthène (de Hosson et Décamp, 2011), nous

avons montré que d'un point de vue strictement cognitif, le passage de la divergence au parallélisme relève d'un passage à la limite complexe, et nécessite pour les élèves d'effectuer un saut conceptuel dont la difficulté ne doit pas être sous-estimée.

Dans ce chapitre, nous proposons dans un premier temps l'exploration de sources historiques empruntées à l'astronomie chinoise faisant écho à une représentation de la lumière du soleil en rayons divergents. Après une rapide présentation de ces sources, nous évoquons quelques pistes pour leur exploitation pédagogique en classe. Puis, nous adoptons un point de vue plus épistémologique en examinant un texte issu d'une aire culturelle distincte (antiquité grecque) mais fondé sur une même observation : celle de l'ombre formée par un gnomon planté verticalement dans le sol à midi (solaire) au solstice d'été. Selon cette perspective, les dessins produits par les élèves acquièrent le statut de modèle intermédiaire entre deux modèles cosmologiques limites, l'un grec, porté par la *Théorie élémentaire*[1] de Cléomède, l'autre chinois dont témoignent le *Chin Shu* (le rite des Zhou), et le *Zhou bi suan jing* (le gnomon des Zhou) ; cette modélisation intermédiaire est discutée dans une dernière partie.

II. Rayons divergents, Terre plate : éléments de cosmologie chinoise

Les textes historiques chinois exposés ci-après constituent deux présentations d'une même mesure, celle de la distance Terre-Soleil. Le modèle cosmologique sous-jacent à cette mesure repose sur une Terre dont la surface est plate (en forme de disque) et sur un Soleil situé sur une demi-sphère s'appuyant sur le disque formé par la surface de la Terre.

1. le *Chin shu* ou « histoire des Chin » (晉書)

La première source chinoise proposée est un extrait du *Chin shu* (晉書) ou « histoire des Chin ». Il s'agit de l'histoire dynastique officielle de la dynastie Chin (+256/+420), histoire qui a été écrite aux alentours de l'an 635 de notre ère, sous le règne de l'empereur T'ai Tsung (règne: +628/+649) par un collectif d'auteurs. Cette histoire dynastique comprend quelques chapitres astronomiques. L'extrait traduit ci-dessous, qui présente la théorie de Wang Fan, est repris d'un article de Kalinowski (Kalinowski, 1990) ; on trouvera une édition anglaise complète des chapitres astronomiques du Chin Shu dans la traduction de Ho Peng Yoke (1966).

> « Rites des Zhou : "[le lieu où] l'ombre du solstice est d'un pied et demi, on l'appelle le milieu de la Terre". Le commentaire de Zheng Zhong donne les précisions suivantes : "La tablette étalon mesure un pied et demi. Le jour du solstice d'été, on érige un gnomon de huit pieds. Si [à midi] son ombre coïncide avec la tablette étalon [l'endroit où se trouve érigé le gnomon] sera nommé milieu de la terre. Ce lieu correspond à l'actuelle Yangcheng dans la préfecture de Yingchuan." Selon Zheng Xuan, "le rapport de l'ombre du Soleil aux distances terrestres est tel qu'il y a une différence d'un pouce pour un déplacement de mille *li*. Puisque l'ombre [solsticiale] mesure un pied et demi, le lieu [se trouvant ce jour-là] à la verticale du Soleil sera à 15 000 *li* au sud [du gnomon]". De ceci, on peut déduire que la distance verticale du Soleil à la Terre [le jour du solstice d'été] est de 80 000 *li* et que le demi-diamètre du Ciel correspond à la longueur du rayonnement oblique du Soleil sur Yangcheng. Puisque la figure du Ciel est ronde comme une boule, que la Terre se tient en sa moitié et que Yangcheng en occupe le centre, la distance de ce lieu au Soleil ne variera pas ; elle sera toujours égale, quels que soient l'heure du jour ou le moment de l'année. C'est pourquoi nous savons que le rayonnement oblique du Soleil sur Yangcheng représente le demi-diamètre du Ciel. »
>
> Note[2]: 1 pied = 1 *chi* = 10 pouces = 24 cm ; 1 pouce = 1 *cun* = 2,4 cm ; 1 *li* = 560 m.

1 Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων

2 La valeur du *li* a beaucoup varié au cours des siècles. KALINOWSKI (1990) évoque une valeur de 432 m correspondant effectivement à 1800 pieds. CULLEN (1996, p 113-114) utilise une valeur de 500 m. La valeur de 560 m ici pro-

2. Le *Zhou Bi Suan Jing* (周髀算經)

La deuxième source historique que nous explorons ici est empruntée au *Zhou bi* (周髀) : une collection de textes chinois anciens sur l'astronomie et les mathématiques rassemblée probablement sous la dynastie Han (1er siècle avant notre ère) bien qu'il soit traditionnellement supposé qu'ils aient été écrits sous la dynastie Zhou, mille ans plus tôt (Cullen, 1996). D'après l'explication donnée dans le texte lui-même (cf. l'extrait ci-dessous), le titre peut être traduit par « le gnomon des Zhou ».

Ce texte évoque la même procédure que celle de l'extrait du *Chin Shu* mais de manière plus concise. Si la variante qu'elle présente peut être considérée comme plus difficile pour la compréhension, il nous a semblé intéressant de la présenter car on trouve dans un des commentaires de ce texte une proposition de démonstration de la relation de proportionnalité entre l'ombre du gnomon et la distance de celui-ci au point situé à l'aplomb du Soleil, commentaire qui sera évoqué dans la suite de ce texte. L'extrait ci-dessous a été traduit en français par nos soins à partir de la version anglaise complète de Cullen (Cullen, 1996, p. 178-179) :

> « #B10[26c] Le *zhou bi* fait 8 *chi* de long. Le jour du solstice d'été son ombre [méridienne] fait un *chi* et six *cun*. Le *bi* est la hauteur [du triangle rectangle] et son ombre [méridienne] exacte est la base. 1000 *li* plus au sud la base fait un *chi* et cinq *cun*, et 1000 *li* plus au nord la base fait un *chi* et 7 *cun*. Plus le soleil est au sud, plus l'ombre est longue.
>
> #B12[34h] Méthode: le *zhou bi* fait 8 *chi* de long, et la diminution ou l'augmentation de la base est d'un *cun* pour mille *li*.
>
> #B15[34m] Rong Fang a demandé : "qu'entend-t-on par [le terme] *zhou bi* ?" Chen Zi a répondu : "Dans les temps anciens le Fils du Ciel régnait depuis Zhou. Cela signifie que ces quantités étaient observées à Zhou, d'où le terme *zhou bi*. *Bi* signifie *biao*, gnomon." »[3]

3. Interprétation

Afin de comprendre les deux textes précédents, on peut considérer le Soleil comme une source ponctuelle, émettant des rayons divergents venant frapper différents gnomons verticaux, situés en des points alignés et régulièrement espacés à la surface d'une Terre plate (le long d'une droite orientée Nord/Sud). La figure 2 (qui n'est dans aucun des deux textes historiques) propose un modèle représentant la situation évoquée dans le premier extrait proposé. Le soleil (*S*) considéré comme ponctuel envoie des rayons divergents vers les sommets E_i des différents gnomons $A_i E_i$. Ces gnomons sont disposés en des points A_i régulièrement espacés ($A_i A_{i+1}$ = 1000 *li*). L'ombre $A_i B_i$ des gnomons augmente régulièrement ($A_{i+1} B_{i+1} - A_i B_i$ = 1 *cun*). L'ombre du gnomon de Yangcheng valant 15 *cun*[4] on en déduit que Yangcheng est situé au point A_{15} et que la distance entre Yangcheng et le point (*C*) à la verticale du Soleil vaut 15 000 *li*. Enfin, la taille d'un gnomon valant $E_i A_i$ = 8 *chi* = 80 *cun*, la distance *SC* vaut donc 80 000 *li* (auxquels il faut ajouter 8 *chi*, hauteur du gnomon, qu'on considère comme négligeables).

---

posée est à prendre comme un majorant des différentes valeurs que l'on peut trouver dans la littérature.

3 #B10 [26c] : « The *zhou bi* is eight *chi* in length. On the day of the summer solstice its [noon] shadow is one *chi* and six *cun*. The *bi* is the altitude [of the right-angle triangle], and the exact [noon] shadow is the base. 1000 *li* due south the base is one *chi* and five *cun*, and 1000 *li* due north the base is one *chi* and seven *cun*. The further south the sun is, the longer the shadow. »

#B12 [34h] : « Method : the *zhou bi* is eight *chi* long, and the decrease or increase of the base is one *cun* for a thousand *li*. »

#B15 [34m] : « Rong Fang asked "What is meant by [the term] *zhou bi* ?". Chen Zi replied "In ancient times the Son of Heaven ruled from Zhou. This meant that quantities were observed at Zhou, hence the term *zhou bi*. *Bi* means *biao*, gnomon" ».

4 Une petite différence est présente dans le *zhou bi*: le point de référence n'est pas le point A_{15} mais est le point A_{16} puisque l'ombre évoquée fait 1,6 *chi*.

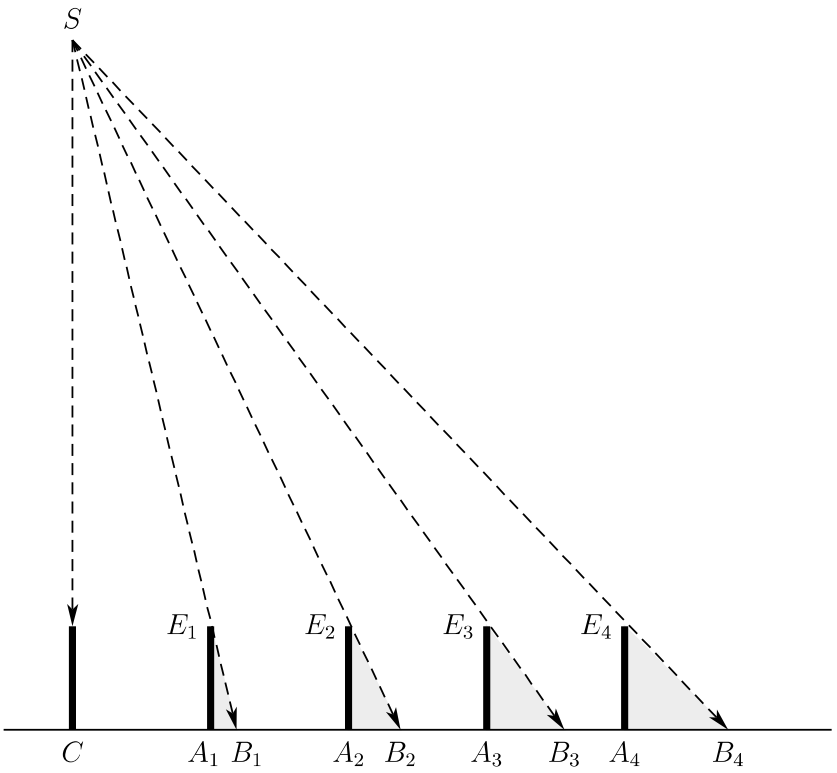


Figure 2. Figure illustrant la mesure de la distance Terre-Soleil dans la cosmologie chinoise (échelle non respectée – illustration: N. Décamp)

Selon Kalinowski, la valeur de 1000 *li* entre deux gnomons successifs est une valeur idéalisée et ne semble pas relever réellement d'une mesure[5] (Kalinoswski, 1990). En outre, la valeur de 15 000 *li* repose sur une extrapolation de ce qui se passe 1000 *li* au sud et 1000 *li* au nord du gnomon situé à Yangchen (considéré comme le « centre de la Terre »), alors que rien ne permet d'affirmer qu'une loi linéaire pour des petits déplacements le resterait pour des déplacements plus grands. L'extrapolation n'est d'ailleurs pas valide dans le cas d'une Terre sphérique. Pour autant, les calculs conduits dans le *Chin Shu* et dans le *Zhou Bi* sont en parfaite cohérence avec les observations décrites, ce qui confère au modèle cosmologique des Zhou une grande robustesse et une validité difficilement discutable.

III. Utilisation des sources chinoises en formation d'enseignants

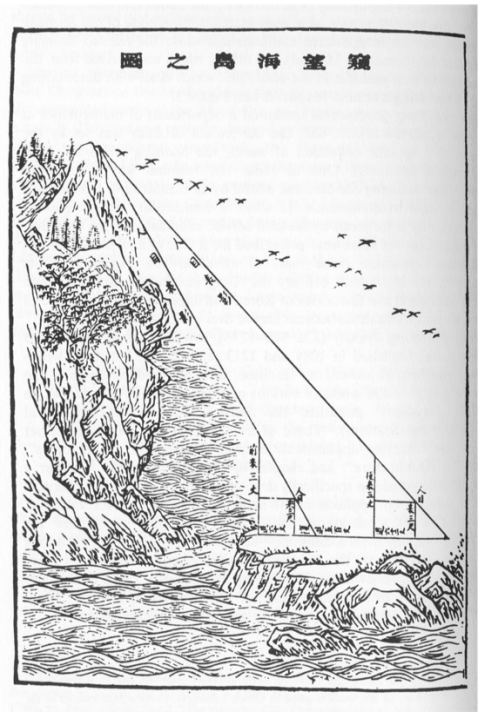
5 Sur la réalité des mesures évoquées, on trouve dans COUPRIE (2009) des calculs se proposant de vérifier les mesures évoquées dans une troisième source historique chinoise, un chapitre du *Huai nan tzu* (120 avant notre ère). Il y est également évoquée une variation de 1 *cun* entre les longueurs de l'ombre de deux gnomons identiques situés à 1000 *li* l'un de l'autre. Or, en reprenant la position des deux gnomons évoqués dans ce troisième texte - Yangcheng (33,3 ° N; 111,7° E) et un endroit situé 1000 *li* (415,8 km) plus au sud soit à la latitude 29,5°N -, COUPRIE (2009) conclut que la différence entre la longueur de l'ombre des deux gnomons devrait être de 9 *cun* et non de 1 *cun*, comme cela est évoqué dans la source historique. Ce qui laisse supposer que « les chiffres avancés par les astronomes chinois ne résulteraient pas d'observations ». PANCHENKO (PANCHENKO, 2002) suggère pour expliquer ces incohérences, que la méthode utilisée par ces astronomes aurait « été établie quelque part hors de Chine, et que, dans le processus de transmission, la mesure étrangère aurait été remplacée par le *li* chinois ». KALINOWSKI (KALINOWSKI, 1990) fait lui aussi remarquer que « bien que la procédure [...] soit théoriquement exacte, l'écart est si grand avec la réalité et la proportion de 1 pour 1000 si parfaite qu'il y a peu de chances que ce rapport ait été établi à partir d'observations réelles ». Il lie pour sa part cette distance de 1000 *li* à l'étendue du domaine royal (un carré de 1000 *li* de côté), le nombre 1000 représentant « une valeur idéalisée en relation directe avec la détermination du milieu de la Terre à l'aide d'un gnomon ».

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

Les activités que nous décrivons ci-après ont été testées avec des étudiants se destinant au métier de professeur des écoles et n'ayant pas reçu d'enseignement scientifique depuis la seconde. L'objectif était de leur faire travailler la notion de modèle et de questionner la nature de la science. Ces activités, ainsi que l'étude mathématique associée, nous semblent également réalisables avec des élèves de seconde, puisque les contenus engagés sont adaptés à la partie « univers » du programme de physique-chimie.

1. Une modélisation physique

Partant de l'un ou l'autre des textes précédents, un premier travail peut consister à faire reconstituer la figure 2 par le public cible (étudiants ou élèves). Pour rendre le travail plus concret, on pourra également alors à peu de frais reproduire physiquement la situation décrite dans les textes. En effet, rien n'oblige à ce que les distances mises en jeu soient astronomiques. Une situation très similaire à celle de la mesure Terre-Soleil se retrouve d'ailleurs dans un autre classique chinois, le *classique de l'île maritime* (*Haidao Suanjing*, Swetz, 1992), dans un problème où l'on cherche la distance entre une embarcation et une île montagneuse. La figure 3, datant de 1726, tirée du *Tu Shu Ji Cheng* et reproduite (Swetz, 1992, p. 10) illustre cette situation du *Classique de l'île maritime*. Dans cette situation, une embarcation se rapproche du sommet d'une île. Des visées en direction du sommet de l'île sont réalisées en deux points situés à des distances différentes de l'île en question. On obtient ainsi les deux triangles rectangles représentés sur la figure 3, ces deux triangles ont même hauteur mais une base d'autant plus petite qu'on se rapproche de l'aplomb du sommet de l'île. Connaissant la valeur de la hauteur commune aux deux triangles, les valeurs de deux bases et la distance parcourue d'une position à l'autre, on retrouve la hauteur du sommet. Ceci, par la même méthode que celle qui permet de retrouver la hauteur du soleil sachant que l'ombre d'un gnomon de 80 *cun* varie d'un *cun* lors d'un déplacement de 1000 *li* (le soleil joue le rôle du sommet de l'île, l'ombre celui de la base des triangles, le gnomon celui de la hauteur des triangles).



Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

Figure 3. Une gravure de Liu Hui illustrant *le Classique de l'île maritime* (*Haidao* Suanjing), extraite de *Tu Shu Ji Cheng* (1726) – libre de droit et accessible à https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sea_island_survey.jpg (vérifié le 22 avril 2017).

Le matériel nécessaire à une modélisation physique de la mesure de la distance Terre-Soleil est rudimentaire : il suffit d'être en mesure de faire l'obscurité dans une salle, de disposer d'une ampoule (qu'on considèrera ici comme une source de lumière quasi-ponctuelle) et d'une série de petits gnomons qu'on alignera au sol. Il est crucial que ceux-ci soient tous de tailles identiques et perpendiculaires au sol. Une solution simple consiste à prendre des feuilles de papier A4 et à les plier en quatre en les disposant comme sur la figure 4.

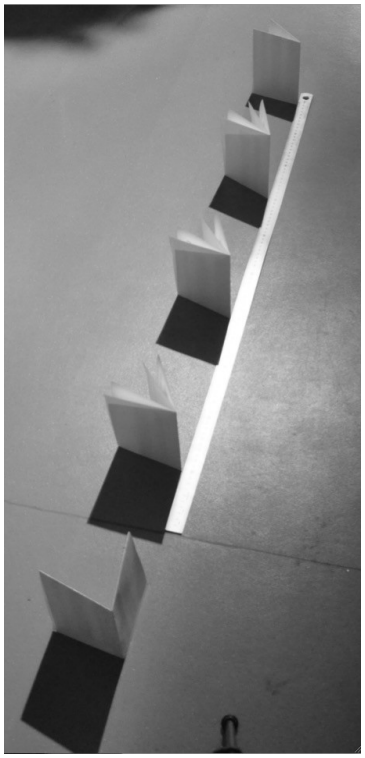


Figure 4. Une modélisation physique reproduisant la situation évoquée dans les textes chinois (crédit photographique: C. de Hosson)

Il est non moins crucial que les gnomons soient coplanaires avec la source lumineuse si l'on veut obtenir la relation de proportionnalité espérée. L'expérience prouve que cet alignement n'a rien d'évident pour les élèves. Selon le degré d'autonomie qu'on voudra se fixer, le positionnement des gnomons peut être laissé libre, discuté explicitement lors de l'établissement du protocole ou forcé par l'enseignant à l'aide d'un marquage au sol. Il peut en effet être difficile pour les élèves d'obtenir cet alignement, même lorsqu'il est compris. Pour l'obtenir, le plus simple est de se servir des ombres des gnomons eux-mêmes et de disposer d'un réglet de taille suffisante qu'on alignera avec ces ombres (figure 4). On peut aussi se servir de l'ombre d'un fil à plomb un peu épais disposé à une distance raisonnable de la source, ou encore commencer par aligner les gnomons puis de disposer la source dans leur prolongement en observant leurs ombres.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

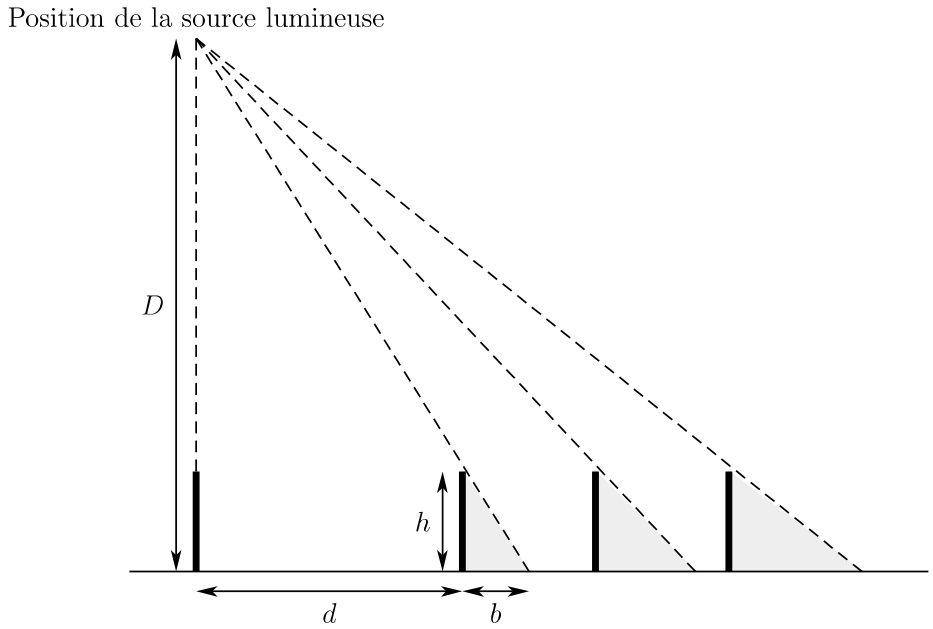


Figure 5. La longueur des ombres diminue régulièrement (*b* est proportionnelle à *d* – illustration: N. Décamp).

Une fois les mesures prises, l'exploitation des données peut être assez différente selon le degré de familiarité des élèves (ou des étudiants) avec la proportionnalité. Plusieurs stratégies peuvent en effet être employées :

1) La plus simple consiste à remarquer une diminution régulière de la longueur de l'ombre des gnomons lors d'une variation régulière de leur position (figure 5). Remonter à la position du gnomon sans ombre revient alors à faire une règle de trois : si on remarque, par exemple, une diminution $\Delta b \approx 2{,}3$ cm de la longueur de l'ombre lors de chaque déplacement $\Delta x \approx 30$ cm de la position du gnomon, et que l'ombre du gnomon le plus proche de la source vaut $b \approx 9$ cm (figure 5), on en déduit que l'aplomb de la source lumineuse se trouve à une distance

$$d = \Delta x \times b / \Delta b \approx 30 \times 9 / 2{,}3 \approx 117{,}4 \text{ cm}$$

du premier gnomon.

2) Certains étudiants, guidés sans doute par le texte historique, sont gênés par le fait que la longueur *b* de l'ombre du premier gnomon (ici 9 cm) n'est pas forcément un multiple entier de la variation Δb de la longueur des ombres (ici 2,3 cm).[6] Ils auront alors tendance à faire une division de *b* par Δb et à reporter la règle de trois sur le reste (ainsi, ils remarqueront dans l'exemple précédent que $b \approx 3 \times 2{,}3 + 2{,}1$ et en déduiront que

$$d \approx 3 \times 30 + (30 \times 2{,}1)/ 2{,}3 \approx 117{,}4 \text{ cm.}$$

3) Ces deux premières méthodes pèchent par le fait qu'elles donnent une importance particulière à l'ombre du premier gnomon, ombre qu'il n'y a pas de raison de favoriser. Par ailleurs, la méthode précédente peut poser problème à cause des incertitudes de mesures, il en effet rare que la variation de longueur des ombres soit strictement identique d'un gnomon à l'autre ce qui complique le traitement. L'alternative consiste à utiliser l'ensemble des points et à faire une régression linéaire (en s'aidant par exemple d'un tableur ou plus « manuellement » en reportant les différents points de

6 On pourra d'ailleurs discuter sur ce point de la différence entre l'expérience réelle et les textes historiques qui peut laisser penser que la mesure n'a pas été réalisée, ou que les valeurs ont été quelque peu idéalisées.

mesure sur papier millimétré). On donne ci-dessous un exemple numérique d'une telle procédure. La figure 6 (correspondant à la table 1) permet de remonter graphiquement à la distance *d* (abscisse de l'intersection entre la droite obtenue et l'axe des abscisses). L'équation linéaire de l'ajustement[7] est ici : $f(x) = ax + b$ avec $a = 0{,}0763 \pm 0{,}0013$ et $b = 7{,}33 \pm 0{,}12$ cm. On a choisi dans la table 1 et sur la figure 6 de prendre comme origine des abscisses la position du gnomon le plus proche de la source lumineuse et de porter sur l'axe des ordonnées la longueur de l'ombre. Ainsi, l'ordonnée à l'origine *b* correspond à l'ombre de ce premier gnomon, notée également *b* sur la figure 5. La distance *d* à laquelle se trouve le gnomon sans ombre s'obtient en résolvant $f(-d) = 0$, c'est-à-dire : $d = b / a$.

Distance au 1er gnomon (cm)	Longueur de l'ombre (cm)	Incertitude de mesure (cm)
0	7,5	0,2
20	8,7	0,2
40	10,4	0,2
60	12	0,2
80	13,4	0,2
100	14,9	0,2
120	16,4	0,2
140	18	0,2
160	19,7	0,2

Table 1. Longueur de l'ombre (en cm) de gnomons identiques en fonction de leur position (en cm)

7 Pour le détail des classiques calculs d'incertitudes sur a et b on pourra consulter par exemple BALLY et BERROIR (BALLY , BERROIR, 2010), paragraphe 3.1.2.a.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

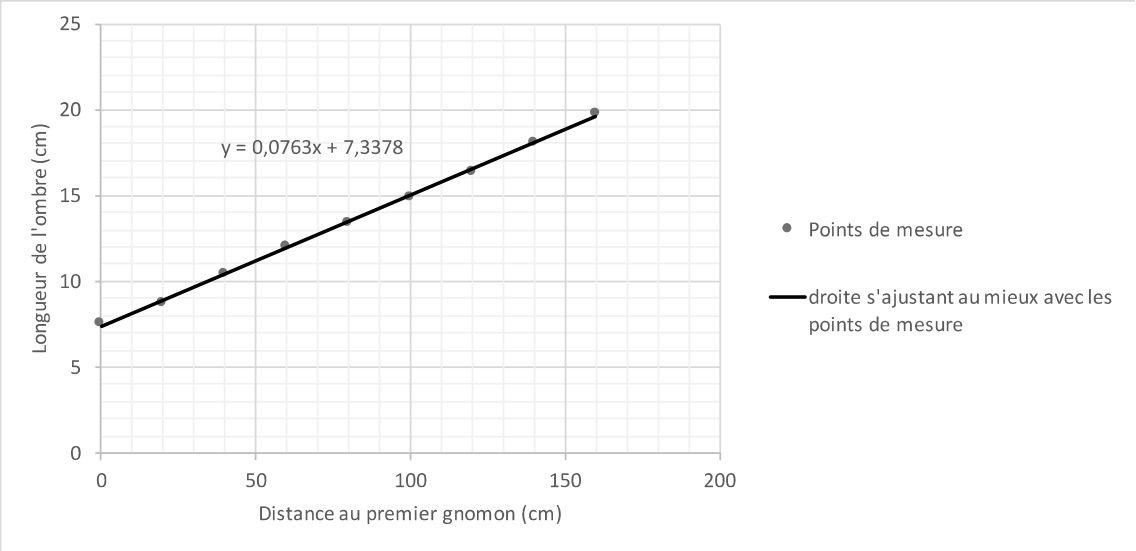


Figure 6. Représentation de l'ombre (en cm) de gnomons identiques en fonction de leur position (en cm) et correspondant aux mesures de la table 1 (illustration: N. Décamp).

Quelle que soit la procédure employée, il faut ensuite retrouver la distance D entre le sol et la source lumineuse. On peut obtenir cette distance en remarquant que deux triangles sont semblables sur la figure 5. On en déduit que :

$$D / h = (b + d) / b = (b + b/a) / b = 1 + 1/a$$

où h = 29,7 / 2 = 14,85 cm est la hauteur de la feuille de papier pliée en quatre.

On obtient alors[8] :

$$D = h\,(1 + 1/a) = 209{,}4 \pm 4{,}4 \text{ cm}.$$

On ne manquera pas de signaler au passage que, contrairement aux textes historiques qui supposent $D \approx h/a$, on ne peut pas dans l'expérience réalisée en classe négliger la hauteur des gnomons si on veut vérifier que le résultat obtenu est compatible avec une mesure directe (dans notre cas, une mesure directe donnait D = 209 ± 1 m, résultat parfaitement compatible avec la méthode des gnomons).

2. Démonstration de la proportionnalité

Une autre piste de travail avec les élèves, plus strictement mathématique, consiste à leur faire démontrer la relation de proportionnalité entre la longueur de l'ombre et la distance au point situé à l'aplomb du Soleil. Cette relation n'est pas si triviale pour les élèves. En effet, l'utilisation du théorème de Thalès, méthode qu'on peut attendre des élèves, est rendue malaisée d'une part parce que les triangles à utiliser ne sont pas tracés a priori sur la figure, et d'autre part parce qu'il faut utiliser des triangles différents pour chacun des gnomons.

Ainsi, si l'on s'appuie sur la figure 2, il faut remarquer que les triangles SE_0E_1 et $E_1A_1B_1$ sont semblables d'où l'on déduit que :

$$E_1A_1 / SE_0 = A_1B_1 / E_0E_1$$

Ce raisonnement est bien sûr valable pour le triangle s'appuyant sur tout gnomon. On a ainsi pour tout i :

$$E_iA_i / SE_0 = A_iB_i / E_0E_i.$$

8 L'incertitude sur D peut être obtenue par la formule de composition des incertitudes

Tous les gnomons étant de même taille, on a par ailleurs $E_1A_1 = E_iA_i$ = constante. Les deux fractions précédentes sont donc égales. On appellera par la suite α ce rapport, ce qui conduit, pour tout gnomon, à l'égalité : $A_iB_i = \alpha\ E_0E_i$, qui constitue la relation de proportionnalité recherchée.

Afin de guider les élèves dans l'établissement de cette relation, une proposition alternative consiste à les munir de papier calque pour pouvoir, une fois les triangles repérés, les déplacer et leur donner une base commune comme sur la figure 7. La figure 7 est obtenue après déplacement des triangles utiles à une démonstration de la relation de proportionnalité entre l'ombre des gnomons et leur distance au point situé à l'aplomb du Soleil. En effet, au lieu d'imaginer que le Soleil est fixe et que le gnomon servant à repérer sa position se déplace, on peut imaginer que le gnomon est fixe et que c'est le Soleil qui se déplace. On voit ainsi plus directement sur la figure 7 que A_iB_i doit être proportionnel à $S'_0\ S'_i$ ce qui est la relation recherchée puisque $S'_0\ S'_i = CA_i$.

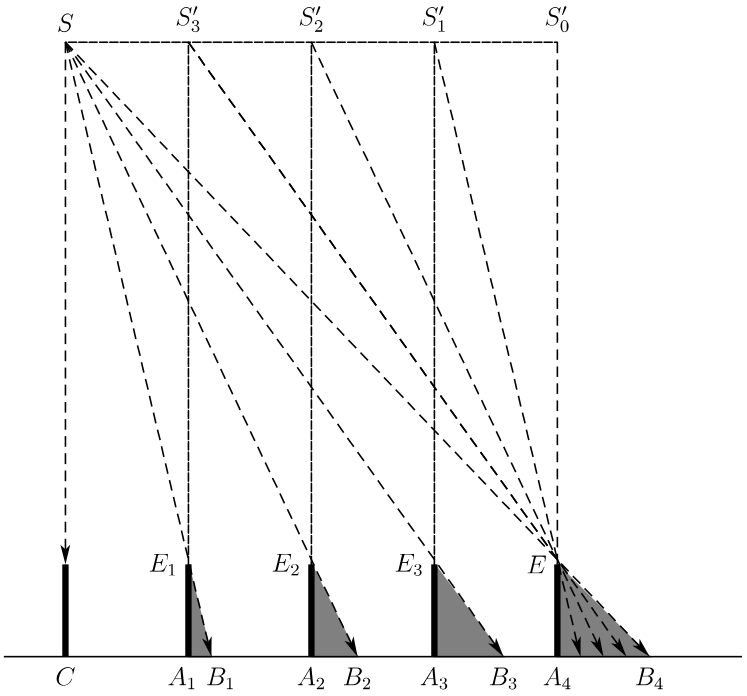


Figure 7. Figure obtenue après déplacement des triangles (Illustration N. Décamp)

Il est intéressant de noter que cette démonstration s'appuyant sur le théorème de Thalès diffère sensiblement du calcul présent dans un commentaire du *Zhou bi* (entre les propositions #B11 et #B12) que l'on doit à Zhao Shuang. On y lit en effet :

> « Les aires [marquées par] un *jia* 甲 gris foncé et par un *yi* 乙 gris foncé sont exactement égales. L'aire [marquée par] un *jia* 甲 gris foncé est le produit de la hauteur d'un gnomon par la distance entre deux d'entre eux. Si l'on compte un à chaque fois que l'on soustrait la différence des ombres [i.e. qu'on divise par la différence des ombres], qui est la largeur de l'aire marquée par un *yi* 乙 gris foncé, ce qu'on obtient est transformé en la longueur de l'aire marquée par un *yi* 乙 gris foncé, qui va jusqu'à la hauteur du Soleil. En se référant au diagramme, [il est évident que] l'on doit ajouter la hauteur du gnomon. Maintenant quand le texte dit 80 000 *li*, il faut les ajouter au sommet du gnomon.
>
> Les [aires marquées par] un *bing* 丙 gris clair et un *ji* 己 gris clair sont de même égales. Si l'on amalgame les aires marquées par un *jia* 甲 gris foncé et un *bing* 丙 gris clair, et qu'on

amalgame les aires marquées par un *yi* 乙 gris foncé et un *ji* 己 gris clair, les aires [résultantes] sont de même égales. »[9]

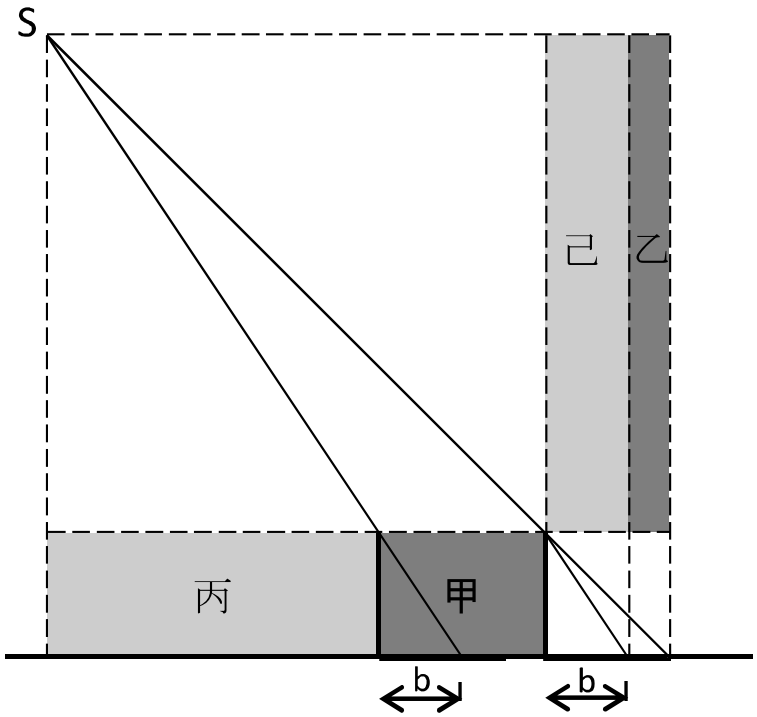


Figure 8. Figure représentant les aires évoquées par le commentaire de Zho Shuang (Illustration: N.Décamp, figure librement inspirée de Cullen, 1996, p218)

On s'aperçoit à la lecture de cet extrait que la procédure chinoise passait par l'établissement d'égalités entre des aires. La figure 8, inspirée par Cullen (Cullen, 1996, p. 218), représente les aires dont il est question dans le commentaire de Zhao Shuang. Sa démonstration repose d'une part sur l'égalité entre les aires (*bing* 丙 + *jia* 甲) et les aires (*ji* 己+ *yi* 乙) et d'autre part sur l'égalité des aires *bing* 丙 et *ji* 己.

Ces égalités admises, on en déduit que les aires *jia* 甲 et *yi* 乙 sont elles aussi égales. Puisque la différence de longueur entre les ombres de deux gnomons successif (qui vaut 1 *cun*) est contenue quinze fois dans *b*, on en déduit que l'aire *yi* 乙 est contenue 15 fois dans l'aires *ji* 己, l'aire *jia* 甲 est donc contenue 15 fois dans l'aire *bing* 丙, ce qui justifie que la distance à l'aplomb du soleil soit de 15 000 *li*. De même, si l'aire *jia* 甲, produit d'une longueur de 1000 *li* par une largeur de 80 *cun* est équivalente à l'aire *yi* 乙 de largeur 1 *cun*, la longueur de l'aire *yi* 乙 doit être de 80 000 *li*, ce qui est la hauteur du soleil (auquel il faut rajouter les 80 *cun*, hauteur du gnomon, qui sont ici négligeables).

9 The areas [marked with] a yellow *jia* 甲 and with a yellow *yi* 乙 are exactly equal. The area [marked with] a yellow *jia* is made by multiplying the height of a gnomon by the distance between them. If you count one for each time [you subtract] the shadow difference [i.e. divide by the shadow difference], which is the breadth of the [area marked with] a yellow *yi*, what you obtain is transformed into the length of the [area marked with] a yellow *yi*, which goes up level with the sun. Referring to the diagram, [it is evident that] you must add the height of the gnomon. Now when [the text] says 80 000 *li*, this is to be added on top of the gnomon.

The [areas marked with] a blue *bing* 丙 and a blue *ji* 己 are likewise equal. If you amalgamate the [areas marked with] a yellow *jia* and a blue *bing*, and amalgamate the [areas marked with] a yellow *yi* and a blue *ji*, the [resulting] areas are likewise equal.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

IV. Rayons parallèles, Terre sphérique : éléments de cosmologie grecque

Il peut paraître surprenant et il est peu courant de faire travailler des élèves ou des étudiants sur un modèle cosmologique qui n'est plus valide aujourd'hui – et qui, en plus, pourrait tendre en physique à renforcer certaines des conceptions des élèves concernant la propagation de la lumière du Soleil. Il nous semble cependant intéressant de montrer d'une part, que du point de vue de la physique ces conceptions ont tout leur sens dans un certain domaine de validité (on a vu expérimentalement qu'elles fonctionnent très bien lorsque la source est suffisamment proche) et d'autre part, que les mathématiques qui soutiennent ce modèle restent, pour leur part, tout à fait valables. C'est une belle occasion de discuter (sur un exemple simple) du fonctionnement conjoint des savoirs mathématiques et physique, de ce qu'est un modèle et de donner au savoir spontané de l'élève un statut différent de celui d'erreur, celui du reflet d'une pensée féconde du passé.

Pour nourrir cette discussion nous proposons de mettre cette cosmologie chinoise en regard d'une cosmologie différente dans laquelle la mesure de l'ombre au pied d'un gnomon disposé verticalement le jour du solstice d'été à midi est à l'origine d'un autre calcul : celui du périmètre terrestre à l'équateur. La première description d'un calcul du périmètre terrestre est souvent attribuée à Ératosthène (276-194 av. J.C.). À cette époque, dans le monde grec, la sphéricité de la Terre est acquise et corroborée par des observations rapportées notamment par Aristote (383-322 av. J.C.) qui précise dans son *Traité du ciel* (II, 14) que « les dimensions de la circonférence [de la Terre] la portent à quarante fois dix mille stades »[10]. De l'œuvre d'Ératosthène, il ne reste presque rien, aussi, l'essentiel de la méthode utilisée par Ératosthène pour calculer le périmètre de la Terre nous est-il parvenu par des témoignages dont le plus important est la *Théorie élémentaire* de Cléomède, écrivain grec que l'on situe au 1er siècle avant J.C. Nous avons choisi de nous attarder sur un extrait de la *Théorie élémentaire* (voir Annexe), où Cléomède présente la méthode d'Ératosthène en considérant comme « admis » les cinq présupposés suivants :

1. Syène (l'actuelle Assouan) et Alexandrie sont situées sur le même méridien ;
2. La distance entre Syène et Alexandrie est connue (5000 stades) ;
3. Les lignes reliant le Soleil et la Terre sont parallèles entre elles ;
4. Les droites sécantes des parallèles formes des angles alternes égaux ;
5. Les arcs de cercles qui reposent sur des angles égaux sont semblables.

S'ensuit l'énoncé de quelques faits d'observation : au solstice d'été, sous le tropique du Cancer, les gnomons des cadrans solaires concaves (*scaphe*) sont nécessairement sans ombre tandis que ceux d'Alexandrie (située au nord d'Assouan) projettent une ombre (figure 9 et 10). Comme les arcs *DA et AS* sont limités par des angles égaux, ils délimitent une portion de cercle identique (présupposé n°5). La portion d'arc formée par l'ombre du gnomon de la *scaphe* située à Alexandrie est donc égale à la portion d'arc délimitée par la ligne Syène-Alexandrie. Autrement dit, l'arc qui va de Syène à Alexandrie représente une portion du cercle terrestre identique à celle du cercle de la *scaphe* délimitée par l'ombre du gnomon d'Alexandrie. Sur la figure 10, S localise la ville de Syène et A celle d'Alexandrie, l'arc *AD* est égal à 1/50e du cercle de centre *E* et de rayon [*EA*], les angles ⌊ aux sommets *E* et centre de la Terre sont égaux, l'arc *AS* délimite donc également 1/50e du cercle terrestre).

10 STRABON (58 av. JC – 21 ap. J.C.) dans son *Traité de géographie* fait lui mention d'une valeur de 252 000 stades pour la mesure du périmètre terrestre.

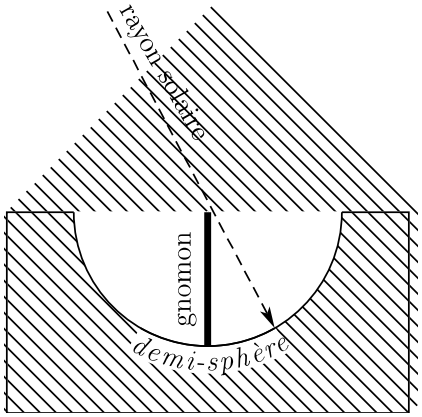


Figure 9. Cadran solaire hémisphérique ou *scaphe* (illustration: N. Décamp)

L'hypothèse du parallélisme des rayons du Soleil semble prendre une forme quelque peu différente de la forme construite dans le cadre de l'optique géométrique admise aujourd'hui. Cléomède précise en effet que le parallélisme concerne les lignes « reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre ». Dans cette perspective, le Soleil n'est pas considéré comme un ensemble de points d'où émanent un ensemble de cônes contenant un ensemble de rayons, mais comme un ensemble de points envoyant chacun un rayon unique. En outre, l'évaluation de la distance entre Syène et Alexandrie demeure encore aujourd'hui sujette à discussions (Bowen, 2008). Enfin, l'utilisation de la *scaphe* n'est pas certaine mais il est clair qu'en l'absence d'outils mathématiques tels que la tangente[11], il s'agissait là d'un moyen efficace pour convertir un rapport de distance (longueur de l'ombre / hauteur du gnomon) en un arc de cercle (Goldstein, 1984). Précisons à cette occasion que l'ouvrage de Cléomède auquel nous nous référons ici est équivalent à nos manuels scolaires, et que l'on peut supposer que l'appel à la *scaphe* est le résultat d'une volonté de simplification de la méthode utilisée par Ératosthène qui demeure, à ce jour, incertaine.

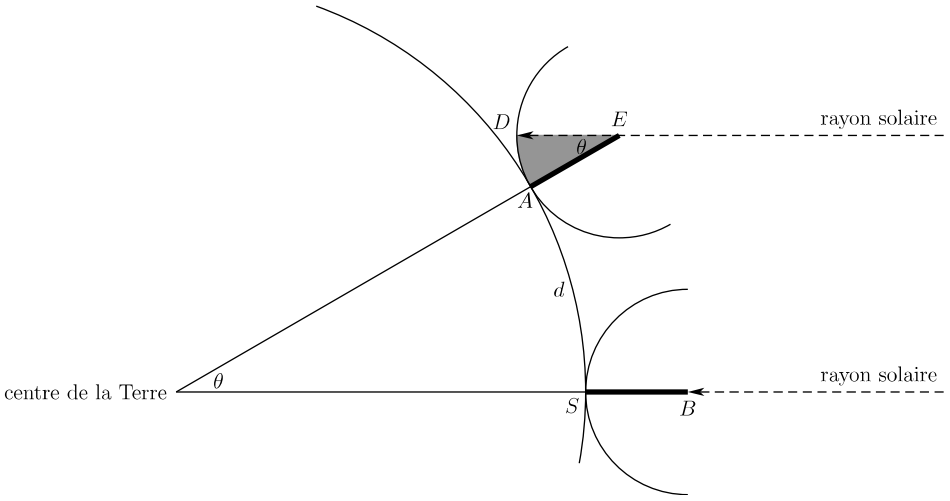


Figure10. Schéma représentant la méthode d'Ératosthène telle que décrite par Cléomède (illustration: N. Décamp)

Notons que si certaines des exégèses auxquelles nous nous référons semblent remettre en cause le caractère réaliste de la technique de mesure rapportée par Cléomède, la *Théorie élémentaire* se pose comme l'un des rares témoignages historiques de la méthode qu'aurait utilisé Ératosthène pour calculer le périmètre de la Terre. Il constitue en cela une source historique dont le contenu se

11 La « tangente » a été inventée au IIe siècle avant J.-C. par HIPPARQUE, un siècle après ERATOSTHÈNE.

distingue de la plupart des récits vulgarisés que l'on trouve notamment dans les ouvrages scolaires actuels (ces distinctions sont précisées dans Décamp et de Hosson, 2011).

V. Cosmologie grecque, cosmologie chinoise : mise en perspective

Les récits historiques présentés ci avant décrivent des mesures de distances astronomiques à l'aide d'une même procédure instrumentée : la mesure d'une ombre au pied de plusieurs gnomons, réalisée au même moment : midi (heure solaire), le jour du solstice d'été, en deux endroits de la Terre. Les similitudes en termes d'instrument et de moment d'usage sont certainement liées à la précision des mesures qu'ils permettent. En effet, l'usage d'un bâton planté verticalement dans le sol (gnomon) constitue un moyen efficace pour palier la difficulté (voire l'impossibilité) de relever directement la position du Soleil dans le ciel. Lorsqu'un gnomon unique est planté verticalement dans le sol, la direction et la longueur de son ombre varient en fonction de l'heure de la journée ainsi qu'en fonction du jour dans l'année : c'est le principe du cadran solaire. Un tel dispositif permet donc de repérer de manière précise des instants particuliers et parmi ceux-ci, le moment de l'année où l'ombre d'un gnomon est minimum (midi, heure solaire, jour du solstice d'été), c'est-à-dire, lorsque le Soleil est au plus haut dans le ciel.

L'observation de l'évolution de l'ombre au pied d'un gnomon permet donc d'accéder à l'évolution de la position du Soleil dans le ciel et ce, quel que soit le modèle cosmologique que l'on se donne pour réaliser et exploiter les observations. Autrement dit, la mesure du temps *via* l'observation des régularités dans les variations de l'ombre d'un gnomon unique n'est pas affectée par la cosmologie adoptée. Par exemple, si l'on admet aujourd'hui que la Terre n'est ni plate, ni au centre de l'univers, la définition du jour solaire et de l'année que l'on peut déduire de l'ombre d'un gnomon reste identique à celle des civilisations ayant adopté le modèle d'une Terre plate. En effet, définir l'année comme le temps que la Terre met pour effectuer un tour complet autour du Soleil n'est ni plus ni moins légitime que de définir l'année comme étant le temps qui s'écoule entre deux instants successifs où l'ombre d'un gnomon est minimum. En revanche, il apparaît difficile de relier de manière pertinente la longueur et la direction de l'ombre projetée par un gnomon unique à la position du Soleil et de la Terre ainsi qu'à leurs formes respectives. Pour cela, deux gnomons sont nécessaires, et dans ce cas, les observations et mesures faites localement vont conduire à des calculs astronomiques dont la nature diffère selon le modèle cosmologique adopté : dans le cas chinois, la mesure de l'ombre au pied des gnomons mène au calcul de la distance Terre-Soleil ; dans le cas grec, c'est le périmètre terrestre qui se voit calculé.

Afin de mieux comprendre le lien entre modèle et nature de la mesure, nous avons choisi d'examiner ces deux cas (cas chinois, cas grec) comme deux cas limites d'un même modèle décrit à la figure 11. Sur cette figure, si $\alpha = 0$ (parallélisme des rayons du Soleil) et θ non nul (Terre sphérique) alors le modèle est celui qui est décrit par Cléomède ; si $\theta = 0$ (Terre plate) et α non nul (rayons divergents) alors le modèle est celui décrit dans le rite des Zhou. Cette figure est à rapprocher des productions des élèves (figure 1) dans lesquels θ est non nul (Terre sphérique) et α est non nul (rayons divergents). Ce choix nous conduit à décrire la méthode utilisée dans les deux cas grec et chinois comme un arpentage terrestre de la distance entre les deux gnomons, auquel on associe une mesure de la différence entre les angles définis par les deux ombres projetées. Il s'agit ensuite de transformer cette mesure « au sol » en une mesure astronomique (ceci dit en termes modernes et donc anachroniques) et c'est cette transformation qui est conditionnée par le modèle choisi. Mais également par l'instrument de mesure mobilisé.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

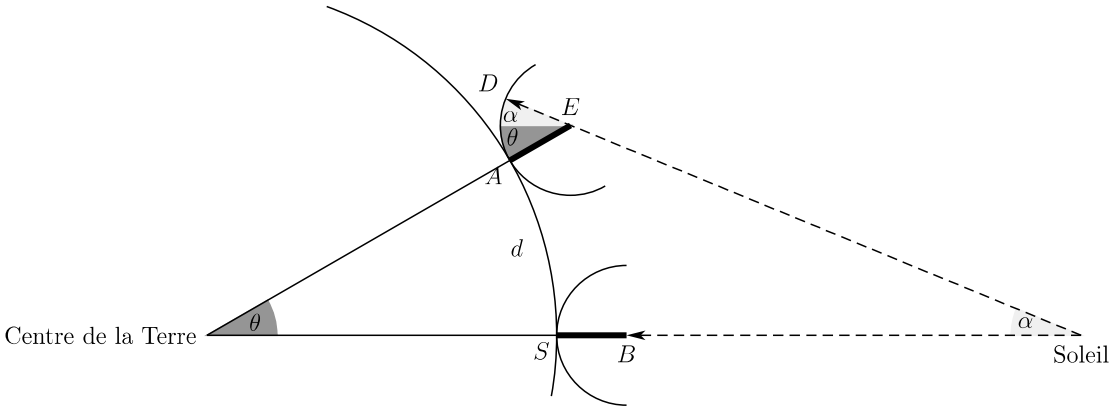


Figure 11. Cosmologies grecque (α = 0) et chinoise (*θ=0*)
sont deux cas limites d'un même modèle (illustration: N. Décamp)

Imaginons deux gnomons *AE* et *SB* placés en deux points *A* et *S* de la Terre. On n'observe pas d'ombre au pied du gnomon *SB*, tandis que l'ombre au pied du gnomon *AE* délimite un angle *AED* au sommet du gnomon. La valeur de cet angle *AED* est la somme de l'angle *θ* (sous lequel on voit les deux gnomons depuis le centre de la Terre) et de l'angle *α* (sous lequel on voit les deux gnomons depuis le centre du Soleil). Avec cette seule mesure d'angle, il est donc impossible de connaître la portion de l'angle *AED* qui correspond à α et celle qui correspond à *θ*. Pour Ératosthène le Soleil est considéré comme envoyant des rayons parallèles (c'est une hypothèse aujourd'hui validée par le fait que la distance Terre-Soleil est très grande devant la distance *AS*), l'angle α est alors quasi-nul[12] et l'angle *AED* peut être entièrement attribué à l'angle θ situé au centre de la Terre. Dans les extraits choisis pour la science chinoise ancienne, l'hypothèse est que la Terre est plate, l'angle θ est alors nul et l'angle *AED* est entièrement attribué à l'angle α situé au centre du Soleil. Dit autrement, tout se passe comme si la différence d'angle observée entre les ombres des deux gnomons situés en deux points différents de la Terre pouvait être interprétée comme la somme de l'angle sous lequel on « voit » ces deux gnomons depuis le centre de la Terre et de l'angle sous lequel on « voit » ces deux mêmes gnomons depuis le centre du Soleil. Il n'y a aucun moyen de déterminer les valeurs de *α* et *θ* à partir d'une expérience ne comportant que deux gnomons. Ceci explique sans doute le fait qu'une même observation conduise à la détermination de distances de nature différente par l'intermédiaire de modèles eux-mêmes différents et non-discriminables en ces circonstances.

En revanche, si l'on dispose d'une série de gnomons il devient alors possible de savoir quelle part revient à l'angle situé au centre de la Terre et quelle part revient à l'angle situé au centre du Soleil. La procédure décrite dans le *Zhou bi* et dans le *Chin shu* mobilise plus de deux gnomons et aurait pu conduire à une remise en cause du modèle cosmologique de la Terre plate. Mais il n'est pas certain que les mesures aient été réalisées, et si elles l'ont été, leur imprécision n'aura pas permis la remise en cause d'un modèle par ailleurs cohérent jusque dans l'instrument utilisé.

12 En réalité l'angle ‹ n'est pas tout à fait nul et l'on observe au pied des gnomons (y compris au pied de celui situé à Syène) une petite zone de pénombre. C'est en cela que les productions des élèves peuvent être considérées comme correctes, dans une certaine mesure.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

VI. Conclusion : retour sur l'enseignement et la formation des enseignants

Considérer les productions des élèves engagés dans la résolution du problème des ombres comme un cas intermédiaire entre deux cas limites d'un même modèle ouvre, selon nous, de nouvelles perspectives pédagogiques. Examinons ces perspectives dans un premier temps sous l'angle des liens entre mathématiques et physique ; nous montrerons dans un second temps que l'exploitation en classe des deux mesures grecque et chinoise permet d'approcher quelques aspects liés à la nature de la science, en particulier du point de vue de l'activité de modélisation.

Si l'on admet avec Galilée que le monde est écrit en langage mathématique[13], il paraît difficile de penser l'enseignement de la physique indépendamment de celui des mathématiques, en particulier dans leur forme géométrique. De ce point de vue, l'astronomie constitue un terrain fertile pour favoriser, en classe, une mise au travail effective du rôle des mathématiques dans le passage du local physique au global cosmologique. Ce parti pris didactique n'est rien d'autre qu'une application au contexte scolaire de ce qu'est l'astronomie ancienne *per se* : un jeu de géomètre sur le terrain de la « réalité observée » :

> « Un exemple significatif en est fourni par la géométrie sphérique, autre nom de l'astronomie, qui permet de se faire une idée du fonctionnement du cosmos : le ciel étoilé devient la sphère des fixes qui tourne à vitesse uniforme autour de son axe ; sur cette sphère on dessine le grand cercle oblique du zodiaque, qui tourne avec la sphère ; tout autour, on peut disposer le grand cercle oblique de l'horizon, immobile celui-là, qui sépare l'hémisphère visible de l'hémisphère invisible. Le géomètre peut alors jouer à loisir avec ces figures imaginées, mais, de ce jeu, il tire des conclusions concrètes qui coïncident assez souvent avec la réalité observée » (Aujac, 1984, 109).

Ici, des mesures réelles de longueurs d'ombre, mesures prises localement, sont mises en lien avec des mesures cosmologiques grâce à des choix géométriques *ad hoc*. Les mathématiques déployées servent le passage d'un local physique observé, mesuré, à un global cosmologique dimensionné, quantifié, par extrapolation. Les mesures d'angles, la géométrie choisie pour la propagation de la lumière du Soleil, pour la forme de la Terre, du ciel, prennent sens dans ce passage local-global ; passage qui se voit également assuré par le choix de l'instrument utilisé pour effectuer les mesures au niveau local.

Il en effet intéressant de remarquer que les modèles en jeu dans les textes que nous avons choisi d'étudier dans ce chapitre engagent des instruments de mesure particulier. Si des gnomons sont utilisés dans les deux cas grecs et chinois, ceux-ci sont agencés tantôt dans un cadran hémisphérique (*scaphe*), tantôt dans sur une tablette plane. La géométrie même de l'instrument apparaît contrainte par le modèle construit : la *scaphe* s'utilise au sein d'une cosmologie sphérique, la tablette au sein d'une cosmologie plane. Ceci confère à la notion de « modèle » une dimension tout à fait particulière qui pointe ici non seulement vers la représentation géométrique du monde, mais également vers celle de l'instrument considéré en tant que « théorie » : « L'instrument de mesure finit toujours par être une théorie et il faut comprendre que le microscope est un prolongement de l'esprit plutôt que de l'œil » (Bachelard, 1938, p. 242).

Cette cohérence entre observations du monde physique, instrument de mesure, et représentation géométrique du monde cosmologique confère aux deux modèles en jeu une validité intrinsèque forte. L'exploitation de cette robustesse en classe de science, *via* un usage approprié des mises en

13 « La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur » (GALILEO GALILEI, *Il Saggiatore*, 1623).

cohérence permettra certainement de donner corps à certains des attributs de la notion de modèle et de l'acte de modéliser, en science.

Bibliographie

ARISTOTE, *Traité du ciel*, trad. J. Barthélémy Saint Hilaire (1886), Paris, librairie philosophique Ladrange. http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tableciel.htm (vérifié le 14 novembre 2015).

AUJAC Germaine, 2001, *Ératosthène de Cyrène, le pionnier de la géographie*, Paris, édition du C.H.T.S.

AUJAC Germaine, 1984, « Le langage formulaire dans la géométrie grecque », *Revue d'histoire des sciences*, 37 (2), 97-109.

BACHELARD Gaston, 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin.

BALLY François-Xavier & BERROIR Jean-Marc, 2010, « Incertitudes expérimentales », *Bulletin de l'Union des physiciens*, n°928, p. 995-1019.

BOWEN Alan, 2008, « Cleomedes and the measurement of the Earth: A question of procedures ». *Centaurus*, n°50, p. 195–204.

COUPRIE Dirk L., 2009, « Anaxagoras and the Size of the Sun », in *Greek Research in Australia: Proceedings of the Biennial International Conference of Greek Studies, Flinders University June 2007*, E. Close, G. Couvalis, G. Frazis, M. Palaktsoglou, and M. Tsianikas (eds.), Flinders University Department of Languages - Modern Greek, Adelaïde, p. 21-30.

CULLEN Christopher, 1996, *Astronomy and mathematics in ancient China: The Zhou Bi Suan Jing*, New York, Cambridge University Press.

DE HOSSON Cécile & DÉCAMP Nicolas, 2011, « La procédure de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite d'Ératosthène : un support pour une reconstruction didactique », *Grand N*, n°87, p. 77-91.

DE HOSSON Cécile & DÉCAMP Nicolas, 2014, « Using Ancient Chinese and Greek Astronomical Data: A Training Sequence in Elementary Astronomy for Pre-Service Primary School Teachers », *Science & Education*, vol. 23, n°4, p. 809-827.

DÉCAMP Nicolas & DE HOSSON Cécile, 2011, « Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène », *Bulletin de l'union des physiciens.*, n°937, p. 1065-1082.

DUCOURANT Dominique, 2007, « L'observation d'Ératosthène en cinquième avec deux punaises », *Bulletin de l'union des physiciens*, n°101**,** p. 825-841.

DUTKA Jacques, 1993, « Eratosthenes' measurement of the Earth reconsidered », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, n°1, p. 55–66.

FARGES Huguette, Di FOLCO Emmanuel, HARTMANN Mireille & JASMIN David, 2002, *Mesurer la Terre est un jeu d'enfant : Sur les pas d'Ératosthène*, Paris, Le Pommier.

FEIGENBERG Joseph, LAVRIK Lea & SHUNYAKOV Vladimir, 2002, « Space scale: Models in the history of science and students' mental models », *Science & Education*, n°11, p. 377–392.

GALILEI Galilei, 1623, *Il Saggiatore*, trad. C. Chauviré (1980), Paris, Les Belles-Lettres.

GOLDSTEIN Bernard, 1984, « Eratosthenes on the ''measurement'' of the Earth », *Historia Mathematica*, n°11, p. 411–416.

HO Peng Yoke, 1966, *The Astronomical Chapters of the Chin-shu*, Paris, Mouton.

KALINOWSKI Marc, 1990, « Le calcul du rayon céleste dans la cosmographie chinoise », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 43, n°1, p. 5–34.

PACHENKO Dmitri, 2002, « The City of the Branchidae and the Question of Greek Contribution to the Intellectual History of India and China », *Hyperboreus*, n°8, p. 244–255.

MERLE Hélène, 1994, « Sensibilisation à l'histoire des sciences d'enfants de 9 à 11 ans : l'expérience d'Ératosthène », *in* André Giordan, Jean-Louis Martinand & Daniel Raichvarg (dir.), *Actes des 17e journées internationales sur l'enseignement des sciences*, p. 475-480.

SWETZ Frank J., 1992, *The sea island mathematical manual: surveying and mathematics in ancient china*, University Park, Pennsylvania, The Pennsylvania State University Press.

Paru le 15/03/2018 dans E. Barbin, D. Bénard, G. Moussard (eds), *Les mathématiques et le réel*, (pp.173-194). Rennes : PUR.
(version revue du 08/05/2019)

Annexe : Extrait de la *Théorie élémentaire* de Cléomède dans la traduction de G. Aujac (2001).

Le procédé d'Ératosthène, qui relève de la géométrie, passe pour un peu plus obscur. Pour clarifier son propos, nous allons formuler les diverses hypothèses de départ. Posons en premier lieu, dans ce cas aussi, que Syène et Alexandrie sont sous le même méridien; en second lieu, que la distance entre les villes est de 5000 stades; en troisième lieu, que les rayons émis par différentes parties du soleil sur différentes parties de la Terre sont parallèles, ce que les géomètres prennent pour hypothèse; en quatrième lieu, ce qui est démontré par les géomètres, que les droites qui coupent des parallèles déterminent des angles alternes égaux, en cinquième lieu, que les arcs interceptés par des angles égaux sont semblables, c'est-à-dire qu'ils sont dans la même proportion et le même rapport avec leurs cercles propres, ce qui est également démontré par les géomètres car chaque fois que des arcs sont interceptés par des angles égaux, si l'un d'eux, n'importe lequel est la dixième partie de son cercle propre, tous les autres seront la dixième partie de leur cercle propre.

Une fois ces notions maîtrisées, il ne sera pas difficile de saisir la démarche d'Ératosthène, que voici. Sont situées sous un même méridien, dit-il, Syène et Alexandrie. Puisque donc les méridiens sont des grands cercles de l'univers, les cercles terrestres situés à l'aplomb de ceux-ci doivent nécessairement être des grands cercles, si bien que la dimension attribuée par raison démonstrative au cercle terrestre traversant Syène et Alexandrie sera aussi celle du grand cercle de la Terre. Ératosthène dit, ce qui est vrai, que Syène est située sous le tropique d'été. Donc, chaque fois que le soleil, parvenu dans le Cancer, au solstice d'été, culmine exactement au méridien, les gnomons des horloges sont sans ombre, nécessairement, puisque le soleil est situé exactement à la verticale (cela se produit, dit-on, sur un rayon de 150 stades). À Alexandrie à la même heure les gnomons des horloges projettent une ombre, vu que cette cité est située au nord de Syène. Comme ces villes sont situées sous un même méridien ou grand cercle, si nous décrivons un arc allant de l'extrémité de l'ombre du gnomon à la base même du gnomon de l'horloge d'Alexandrie, l'arc en question sera une section du grand cercle de la *scaphè*, puisque la *scaphè* de l'horloge est située à l'aplomb d'un grand cercle. Si donc nous imaginons des droites prolongeant les deux gnomons à travers la Terre, elles se rencontreront au centre de la Terre. Puisque l'horloge à Syène est située à la verticale du soleil, si nous imaginons une droite allant du soleil à l'extrémité du gnomon de l'horloge, il n'y aura qu'une seule droite allant du soleil au centre de la Terre. Si nous imaginons, à partir de la *scaphè* à Alexandrie, une autre droite partant de l'extrémité de l'ombre du gnomon et, par l'extrémité du gnomon, allant jusqu'au soleil, cette droite et celle précédemment définie seront parallèles, puisqu'elles vont de différentes parties du soleil à différentes parties de la Terre. Or ces droites parallèles sont coupées par la droite qui va du centre de la Terre au gnomon placé à Alexandrie, ce qui produit des angles alternes égaux : l'un est situé au centre de la Terre, à l'intersection des droites menées des horloges jusqu'au centre de la Terre ; l'autre est situé à l'intersection de l'extrémité du gnomon à Alexandrie et de la droite menée depuis l'extrémité de son ombre en direction du soleil en passant par la pointe du gnomon. Sur celui-ci, est construit l'arc qui va de l'extrémité de l'ombre du gnomon à sa base ; sur l'autre, celui qui est au centre de la Terre, est construit l'arc qui va de Syène à Alexandrie. Donc les arcs de cercle sont semblables, puisque construits sur des angles égaux. Et donc le rapport de l'arc dans la *scaphè* à son cercle propre est le même que celui de l'arc Syène-Alexandrie à son cercle propre. Or l'arc dans la *scaphè* vaut, trouve-t-on, un cinquantième de son cercle propre ; nécessairement donc, la distance Syène-Alexandrie doit valoir un cinquantième du grand cercle de la Terre. Or la distance en question est de 5 000 stades ; et donc le cercle entier vaut au total 250 000 stades. Telle est la démarche d'Ératosthène.