Quand la nature nous donne un cours de maths

Avec la participation de :

Les intervenants sont les élèves de l'option sciences de 6ème et de 5ème, encadrés respectivement par les professeurs de mathématiques Madame Malisova et Monsieur Etzol.

Elèves de 6ème

BARNABOT Angéline
BEZIAT Matthis
BOUCHEZ Zoé
CAFAFA Laëtitia
CASSIN Anna
CASSIN Emy
CHARLES Hugo
CLAUDEON Emmanuelle
DJAFRI Luna
DOLMARE –
ABENZOARE Louanne
DUBOIS Théo
DUPONT Raphaël
FIFILS Tom
GOSSELIN Matéo

MESGUEN Swann
NOVERCAT Roberto
PADOVANI Léo
GRANDCHAMP Terrence
LE BRIS Sahel
LELLOUCHE Laura
MAGNAVAL Léo-Paul
MATHIOT Loann
SORMAIN Imann
SYLVESTRE Thalia
TOURRAINE Yannis
TRAORE Thimoté
VERNIN Nino

Elèves de 5ème

AMELAÏSE Prescylia
AUXACH Yannis
BILBA Stanley
BREUZIN Nel
BREUZIN Zoé
CADAN-DUSART Ha-Loa
CALIF Nicolas
COMBES Serena
COURIOL Melvin
CUELLE Manon
DEMETRIUS Rachel
GALVANI Yannis
GOUDET Noa
JOACHIM Joé
JOURNEAU Nathan
LAPORAL Stéphane
LEITAO Reggiani
LUBINO Sybelle

LUCIANI Nicolas
LUNION Charline
MATHIEU Maëlle
MAXO Axel
MEBTOUL Rayan
MELINA Emilie
MONTHOUËL Alexandre
MURATET Yann
NICOLAS Lauryll

INTRODUCTION

Lors de la première séance, nous nous sommes demandé si le chou romanesco, la fougère et le flocon de neige ont des points communs. Nous avons remarqué qu'en zoomant, on retrouvait la même forme que l'ensemble de la fougère, de même pour le flocon de neige et le chou romanesco. Cela s'appelle l'**autosimilarité**.

Ces objets naturels font partie de la famille des formes fractales.

Le mot « fractale » a été inventé par Benoît Mandelbrot. Il définit une forme invariante par changement d'échelle. Le chou romanesco, les arbres, les flocons de neige sont des exemples de fractales.

Ensuite nous avons vu qu'il y en avait d'autres, donc certains d'entre nous ont réalisé un dossier sur les fractales dans la nature mais aussi dans le corps humain.

« Comment utiliser les mathématiques pour représenter et mieux comprendre les objets au contour irrégulier du monde qui nous entoure ? »

Le point de vue du professeur : « Suite à de nombreuses questions des élèves par rapport à des ressemblances avec des éléments naturels, des images de synthèse et des objets déjà rencontrés dans la vie courante, la simple recherche de points communs a vite évolué en une nouvelle problématique pour essayer de comprendre en quoi les fractales permettent de modéliser des éléments naturels pour mieux les appréhender. »

Nous avons découvert que les différentes parties de ces fractales sont représentées à l'aide d'étapes de construction qu'on répète, les itérations.

I) L’origine des fractales

Benoît Mandelbrot, le père de la géométrie fractale

Le nom de Benoît Mandelbrot, créateur du mot « fractale », revenait souvent dans nos recherches. Quelques-uns d’entre nous se sont donc occupés de chercher sa biographie. Voici un extrait de celle de Benoît MANDELBROT, on n’a gardé que les parties qui parlaient surtout des fractales.

- Benoît Mandelbrot est un mathématicien franco-américain né en 1924 dans une famille juive du ghetto de Varsovie. Ses parents étaient loin des mathématiques: son père vendait des nippes et sa mère était dentiste. Douée d’une *«main droite robuste et de biceps puissants»*, elle arrachait les dents avec habileté. Son oncle Szolem, en revanche, était un mathématicien de renom international. *«Nul n’a davantage influé sur mon parcours scientifique que Szolem»*, nous dit Mandelbrot.
- Le commerce du père périclita à cause de la crise, et la famille abandonna la Pologne pour s’installer à Paris, traversant l’Allemagne nazie à bord d’un train aux portes cadenassées. *«Parmi les personnes que nous connaissions, nous sommes les seuls à être partis pour la France et à avoir survécu»*, se souvient Mandelbrot [...]
- Le jeune Mandelbrot se plut beaucoup à Paris. Au lycée, Mandelbrot fut bientôt considéré comme un intello.
- Au début de sa carrière il développe une nouvelle classe d’objets : les objets fractals, ou fractales. En 1967, il citait déjà comme exemple, dans son célèbre article la « côte de la Bretagne », dont la longueur dépend de l’échelle à laquelle on la mesure. La théorie fractale est, dès cet article, officieusement lancée.
- Dans « Les Objets fractals - Forme, hasard et dimension » paru en 1974 : Il présente au lecteur des objets jusqu’alors peu connus : flocon de Koch, éponge de Sierpinski-

Menger, que les mathématiciens connaissaient sans arriver à les définir véritablement. Tous ces exemples ont en commun l'autosimilarité.

- Il travaille ensuite pour IBM, une société multinationale américaine présente dans les domaines du matériel informatique, du logiciel et des services informatiques.
- Son travail sur les fractales en tant que mathématicien à IBM lui a valu un Emeritus Fellowship au laboratoire de recherche T. J. Watson.
- Il a également montré que de nombreux objets dans la nature étaient bien décrits par des fractales, conduisant ainsi à de nouvelles recherches. Des fractales se retrouvent également dans les phénomènes économiques, comme les fluctuations boursières.
- Il est professeur à l'université Yale (1987), conférencier au Conservatoire national des arts et métiers (1994, 2000). Le 23 novembre 1990, il est fait chevalier de la Légion d'honneur, et est promu officier le 1er janvier 2006.
- Il décède en 2010 dans le Massachussetts.

II) <u>Construction mathématique de quelques courbes fractales</u>

<u>1) Le triangle de Sierpinski</u>

Certains d'entre nous ont ramené la photographie d'un coquillage qui a un dessin avec des triangles imbriqués, et on a voulu comprendre ce dessin. Il s'agit du triangle de Sierpinski.

Le triangle de Sierpinski c'est le truc le plus facile , qu'on a compris de suite et certains d'entre nous l'avaient déjà fait en maths avec leur professeur !

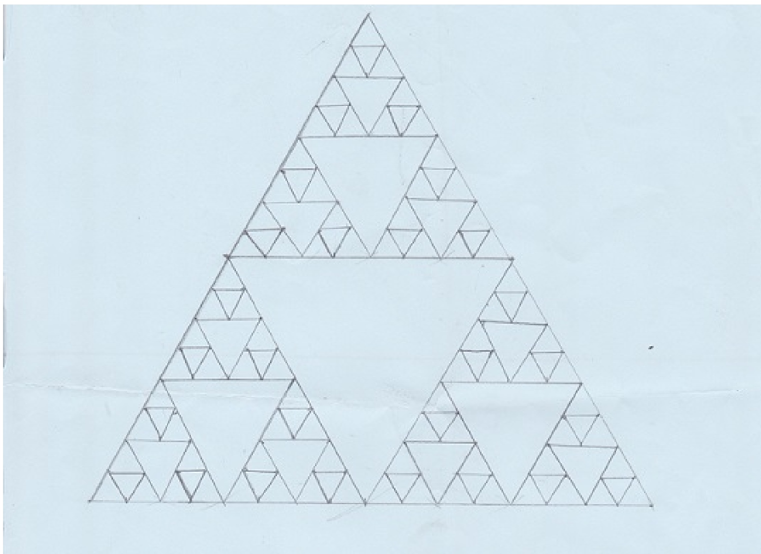
Comment le construit-on ?

On part d'un triangle équilatéral à la première itération, puis on construit les milieux des côtés, ce qui crée trois triangles équilatéraux de même orientation que le triangle de départ. On poursuit la construction des milieux des côtés uniquement dans les triangles ayant cette orientation, et ainsi de suite.

Source de l'image: Wikipédia

On l'a construit jusqu'à l'étape 4, et on s'est vite demandé si cette construction est possible indéfiniment et si ça n'allait pas être trop long de continuer.

Le point de vue du professeur : « Une méthode permettant de calculer le nombre de triangles pleins à une itération a été trouvée par les élèves, ce qui a permis une initiation à la notion de puissances. »



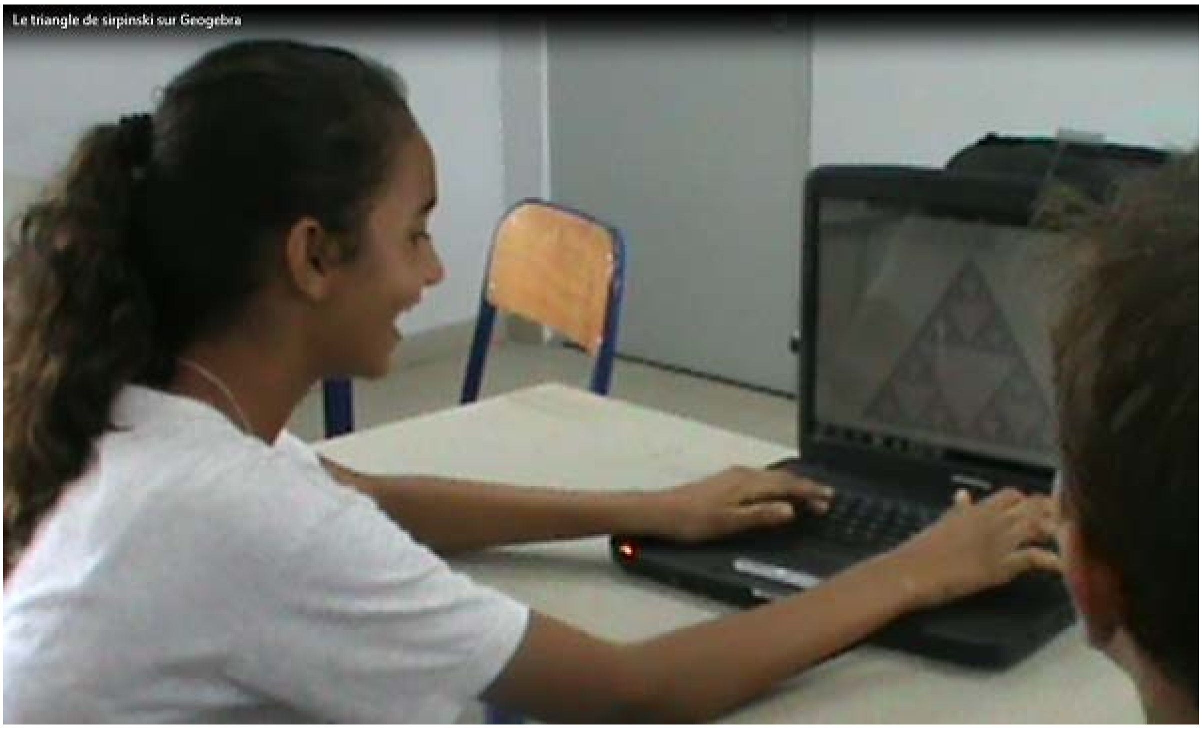
Pour que ce soit plus rapide, on en a fait sur des feuilles, des petits, on a choisi une longueur commune parce que comme ça on pouvait les assembler et en faire un plus grand !

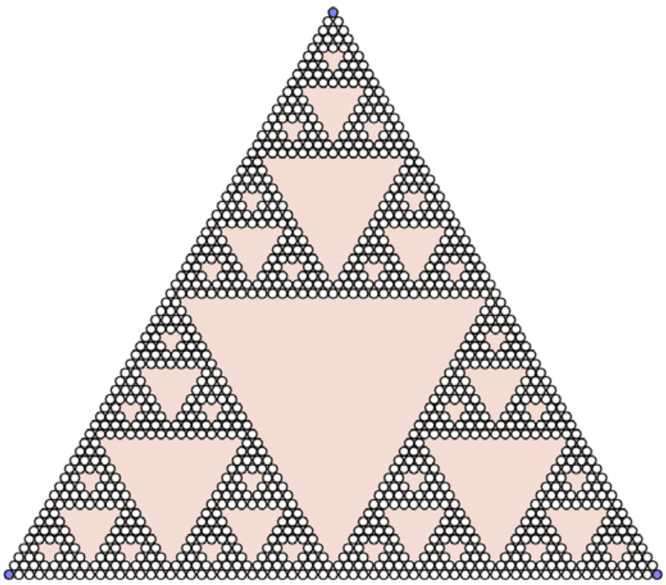
On n’a pas bien compris quelle place pouvaient bien prendre les triangles pleins quand on continuait la construction.

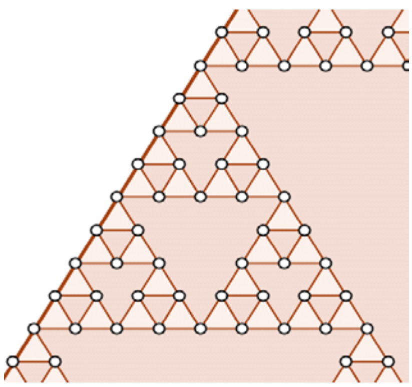
Une d’entre nous a remarqué que l’aire totale des triangles pleins se rapproche de zéro.

Le point de vue du professeur : « Les élèves ont commencé par représenter le triangle de Sierpinski sur papier, en utilisant le procédé qui se répète et qui est connu. Ils se sont vite rendu compte qu'ils ne pourraient certainement pas dessiner de nombreuses répétitions mais en assemblant leurs triangles, ils pouvaient en obtenir un bien plus grand ! Ils ont donc raisonné « du plus grand vers le plus petit » mais aussi « du plus petit vers le plus grand ». Ils ont pu illustrer de façon concrète ce que l'un de leur camarade leur avait exposé comme étant « l'autosimilarité ». »

Après on a voulu le faire sur Geogebra. On a tracé un triangle équilatéral, puis les 3 points qui étaient les milieux des côtés du 1er triangle, et ensuite on a continué mais le professeur a montré qu'on pouvait utiliser un « outil » et c'est allé beaucoup plus vite et il l'a fait jusqu'à pleins d'étapes, à tel point qu'on a appelé notre professeur on lui a dit de fermer les yeux et quand elle les a ouvert on a fait défiler sous ses yeux le triangle en commençant par le haut, ça faisait une animation.





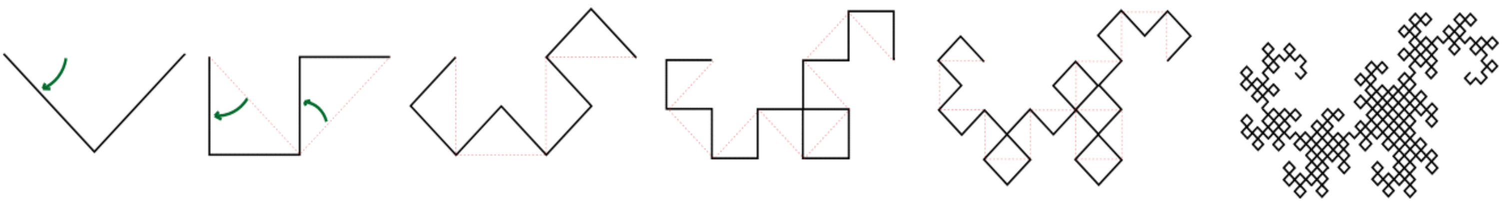


En Voici un « zoom »

2) La Courbe du Dragon

Deux d'entre nous ont trouvé cette courbe : « la courbe du dragon », ça leur a plu à cause du nom, et du coup ils ont fait des recherches et quand ils sont revenus, ils nous ont expliqués ceci :

La courbe du dragon est au « départ » un angle à 90° et à partir d'un segment de base, on remplace chaque segment par deux segments à angle droit alternativement à droite puis à gauche :



On a bien compris mais quand certains ont voulu la construire sur papier blanc là c'était difficile.

Voici ce que l'un d'entre nous a dit : « C'est une courbe faite de pleins de petits segments qui se divisent en pleins de petits angles droits : A chaque fois qu'on passe à une étape suivante les segments deviennent plus petits et la courbe prend une forme inattendue »

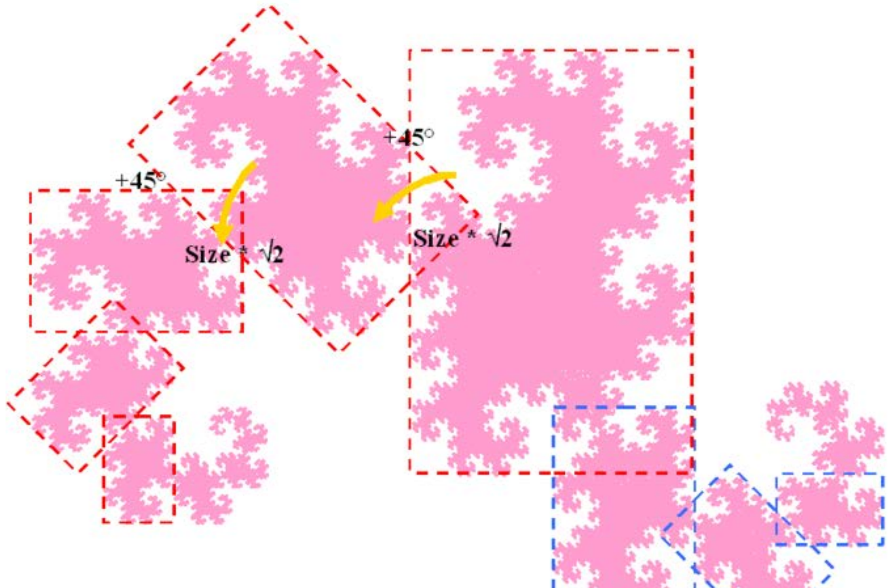
« La construire sur papier est difficile car c'est de plus en plus long à chaque étape ! »

Par contre si on n'efface pas les traits de construction de l'étape 2, ça sert pour l'étape 4 !!!

Un autre a dit « moi je vais chercher un tutoriel sur Youtube ».

Le professeur a expliqué à ceux qui devaient s'occuper d'un atelier dessus que comme c'était difficile on peut faire un collage par exemple pour passer d'une étape à la suivante on fait deux fois l'étape 5, et on tourne l'une des deux figures en angle droit vers la gauche, on colle ça fait l'étape 6. Il nous a dit que ça s'appelait une rotation.

Dans leurs recherches nos camarades ont également trouvé cette image générée par logiciel, montrant la courbe après un nombre important d'itérations



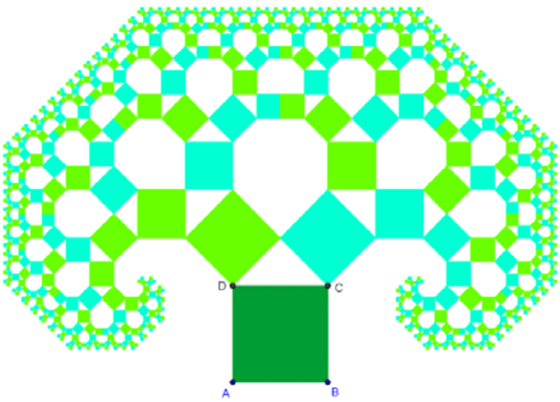
Cette image nous a impressionnés. On ne comprenait pas pourquoi c'était opaque comme une surface alors qu'au départ c'était des traits.

Le professeur nous a dit que dans ce cas-là, on dit que la figure est de dimension 2, comme une surface du plan. On peut, en assemblant plusieurs courbes du dragon, faire un pavage du plan, ce qui explique que la dimension soit 2.

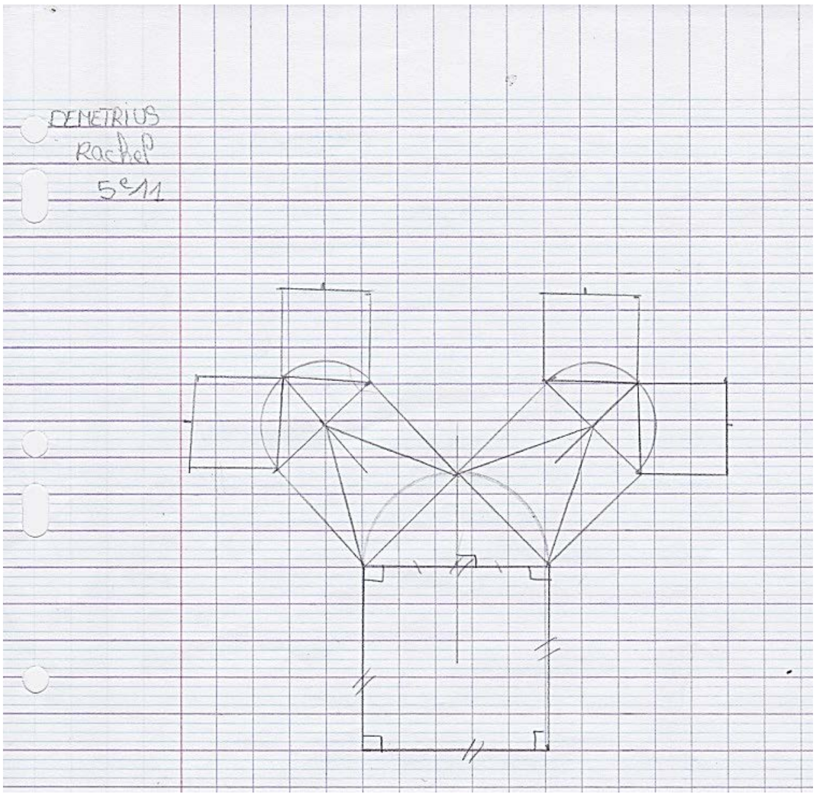
Une camarade explique la construction de cette courbe en utilisant des calques.

3) <u>L'arbre de Pythagore</u>

<u>Le point de vue du professeur</u> : « Un élève ayant ramené une image de cet « arbre », on en a profité pour mettre à jour un nouvel aspect : il y a des fractales dans la nature mais il y aussi de la nature dans les fractales !



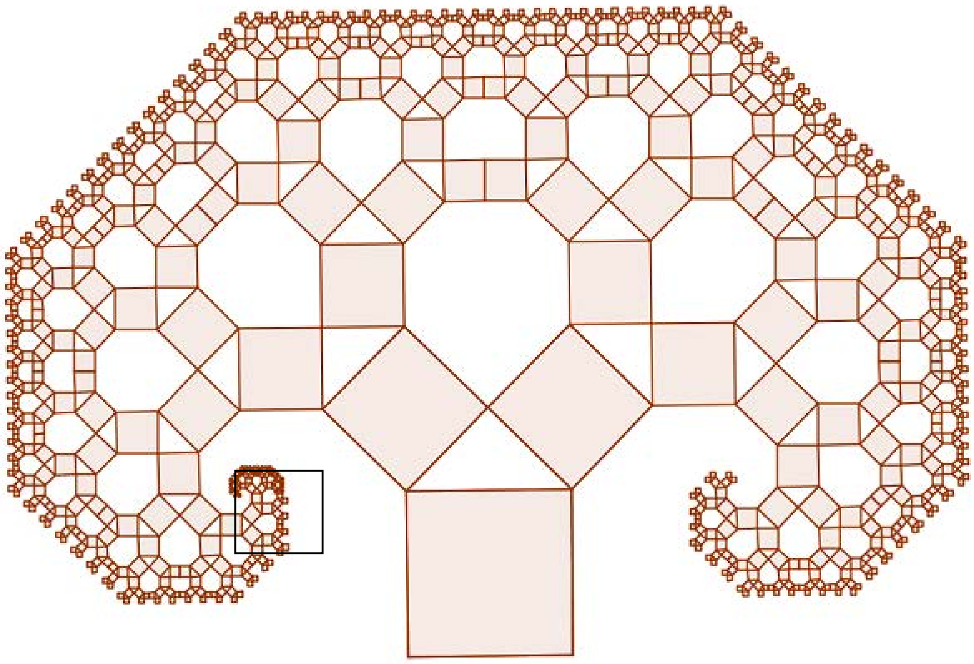
Certains d'entre nous ont essayé de construire l'arbre de Pythagore sur papier, d'autres sur Geogebra.



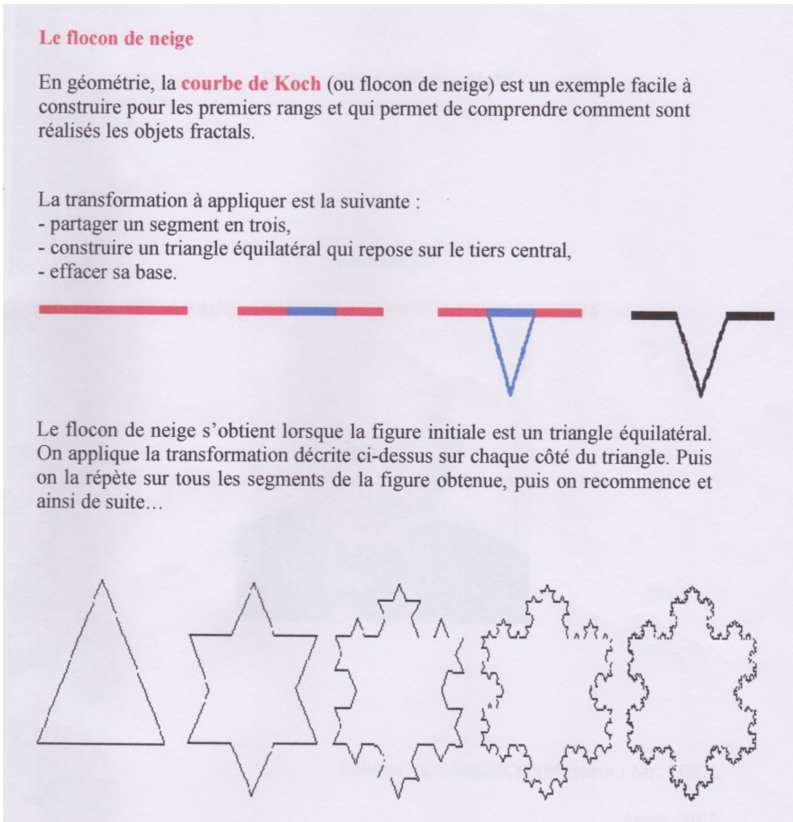
Réalisation des premières itérations de l'arbre de Pythagore sur papier

<u>Bilan du professeur</u> : « Les élèves chargés de présenter à la classe la création de l'arbre de Pythagore sur Geogebra se sont attelés à la tâche avec persévérance et parfois énervement devant l'outil à créer qui ne fonctionnait pas au départ car « les branches poussaient à l'intérieur du tronc ». Ils ont compris désormais comment utiliser l'icône outil, avec le choix des objets initiaux ainsi que des objets finaux Le résultat de leur travail les a d'autant plus ravis que nous l'avons imprimé, agrandi et plastifié ! »

En fait, au départ, on nous a donné les explications nous permettant de faire un « outil » pouvant nous aider à faire l'arbre de Pythagore : ça a échoué plusieurs fois car l'outil faisait les carrés à l'envers et donc on a créé un nouvel outil. Cette fois l'outil marchait, on a donc pu finir un arbre jusqu'à ce qu'on voit à l'intérieur de lui un autre tout petit !



4) Le flocon de von Koch



Le flocon de neige

En géométrie, la **courbe de Koch** (ou flocon de neige) est un exemple facile à construire pour les premiers rangs et qui permet de comprendre comment sont réalisés les objets fractals.

La transformation à appliquer est la suivante :
- partager un segment en trois,
- construire un triangle équilatéral qui repose sur le tiers central,
- effacer sa base.

Le flocon de neige s'obtient lorsque la figure initiale est un triangle équilatéral. On applique la transformation décrite ci-dessus sur chaque côté du triangle. Puis on la répète sur tous les segments de la figure obtenue, puis on recommence et ainsi de suite…

D’autres élèves se sont documentés sur les structures du même type que celle du flocon de neige et ont amené des informations précédentes sur le flocon de von Koch.

Nous avons cherché à savoir quel est le périmètre du flocon. Pour cela, nous avons utilisé le tableur Microsoft Excel et avec des formules, pour calculer, à chaque itération, le nombre de côtés du triangle, le périmètre. Nous avons aussi calculé son aire, en utilisant une indication du professeur.

Nous avons remarqué que l’aire est finie alors que le périmètre est infini. Cela nous a beaucoup étonnés qu’une figure puisse tenir sur une feuille de papier alors que si on essaie d’en faire le tour, on n’arrive jamais à revenir au point de départ.

On a remarqué aussi que l’aire ne dépasse jamais une certaine valeur alors qu’elle continue d’augmenter, ce qu’on a trouvé bizarre.

numéro de l'étape de construction	nombre de cotés	longueur d'un cotés (en cm)	périmètre (en cm)	aire d'un triangle élémentaire (en cm carrés)	aire du flocon(en cm carrés)
1	3	1	3	0,433012701892219	0,4330127018922190
2	12	0,3333333333333333300000	4,00	0,048112522432469	0,5773502691896260
3	48	0,1111111111111111100000	5,33	0,005345835825830	0,6415002990995840
4	192	0,0370370370370370370000	7,11	0,000593981758426	0,6700114235040100
5	768	0,0123456790123457000	9,48	0,000065997973158	0,6826830343504220
6	3 072	0,0041152263374485600	12,64	0,000007333108129	0,6883148613932710
7	12 288	0,0013717421124828500	16,86	0,000000814789792	0,6908178956345380
8	49 152	0,0004572473708276180	22,47	0,000000090532199	0,6919303552973230
9	196 608	0,0001524157902758730	29,97	0,000000010059133	0,6924247818141160
10	786 432	0,0000508052634252909	39,95	0,000000001117681	0,6926445269326910
11	3 145 728	0,0000169350878084303	53,27	0,000000000124187	0,6927421914298350
12	12 582 912	0,0000056450292694768	71,03	0,000000000013799	0,6927855978730110
13	50 331 648	0,0000018816764231589	94,71	0,000000000001533	0,6928048896255330
14	201 326 592	0,0000006272254743863	126,28	0,000000000000170	0,6928134637377650
15	805 306 368	0,0000002090751581288	168,37	0,000000000000019	0,6928172744543130
16	3 221 225 472	0,0000000696917193763	224,49	0,000000000000002	0,6928189681061120
17	12 884 901 888	0,0000000232305731254	299,32	0,000000000000000	0,6928197208402450
18	51 539 607 552	0,0000000077435243751	399,10	0,000000000000000	0,6928200553887480
19	206 158 430 208	0,0000000025811747917	532,13	0,000000000000000	0,6928202040769720
20	824 633 720 832	0,0000000008603915972	709,51	0,000000000000000	0,6928202701606270
21	3 298 534 883 328	0,0000000002867971991	946,01	0,000000000000000	0,6928202995311400
22	13 194 139 533 312	0,0000000000955990664	1261,35	0,000000000000000	0,6928203125847020
23	52 776 558 133 248	0,0000000000318663555	1681,80	0,000000000000000	0,6928203183862850
24	211 106 232 532 992	0,0000000000106221185	2242,40	0,000000000000000	0,6928203209647660
25	844 424 930 131 968	0,0000000000035407062	2989,86	0,000000000000000	0,6928203221107580
26	3 377 699 720 527 870	0,0000000000011802354	3986,48	0,000000000000000	0,6928203226200870
27	13 510 798 882 111 500	0,0000000000003934118	5315,31	0,000000000000000	0,6928203228464560
28	54 043 195 528 446 000	0,0000000000001311373	7087,08	0,000000000000000	0,6928203229470640
29	216 172 782 113 784 000	0,0000000000000437124	9449,44	0,000000000000000	0,6928203229917790

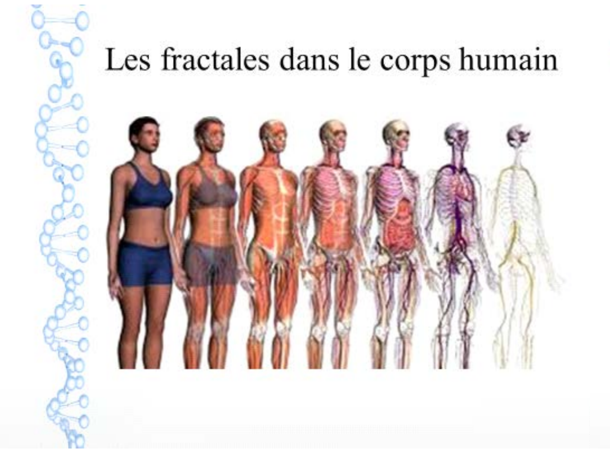
Certains d’entre nous nous ont expliqué que l’aire augmente de moins en moins vite à chaque étape.

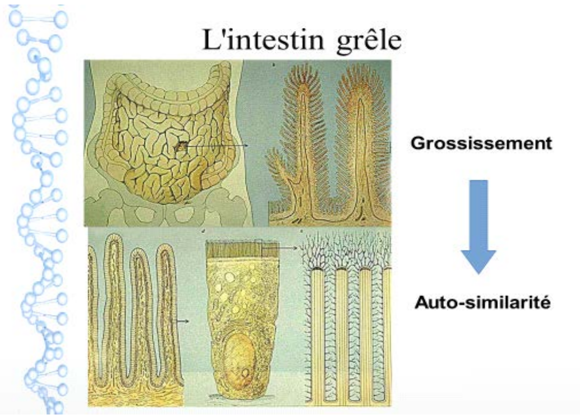
Des élèves du groupe de cinquième ont présenté leurs travaux sur le flocon aux élèves de sixième.

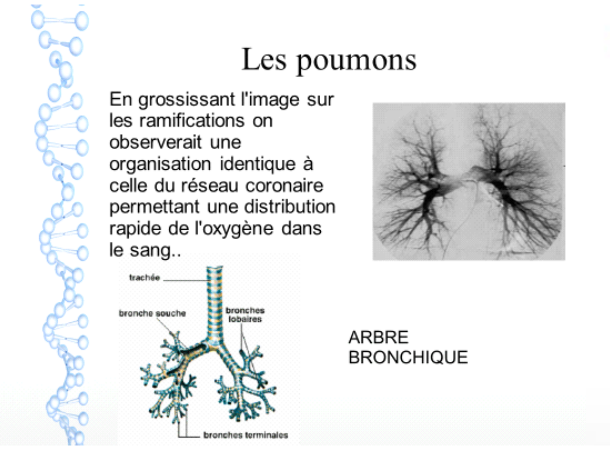
III) Fractales dans la nature

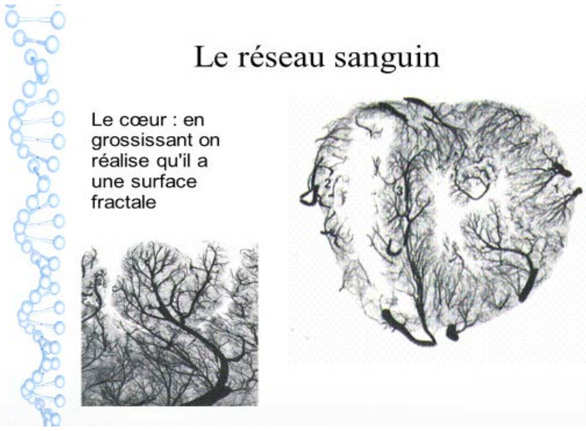
1) Dans le corps humain

Deux élèves de 6ème ont réalisé un diaporama à partir de leurs recherches sur le thème « les fractales dans le corps humain » Voici ce diaporama :









2) En géographie

En faisant leurs recherches à la maison, certains d'entre nous ont trouvé une vidéo sur Internet et ont vu que les littoraux ont une forme fractale. Mandelbrot avait étudié la côte de la Bretagne et nous avons essayé de calculer sa longueur.

Un paquebot ne peut pas passer très près des côtes. S'il longe le littoral breton, il va parcourir une certaine distance.
Un bateau plus petit peut s'approcher plus près de la côte et donc il va parcourir une distance plus grande.

Un randonneur peut marcher tout le long de la côte donc il va parcourir une distance encore plus grande.

Pour trouver la longueur de la côte, on a donc choisi une première longueur étalon, et trouvé une certaine longueur pour la côte.

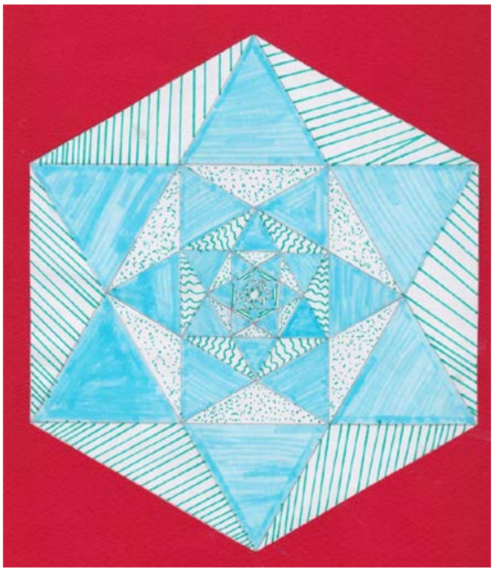
Puis, en prenant une fraction du premier étalon comme référence, on a effectivement trouvé une longueur plus grande pour celle-ci.

On a vu que c'était comme pour le flocon de Koch, pour lequel le périmètre va devenir infini.

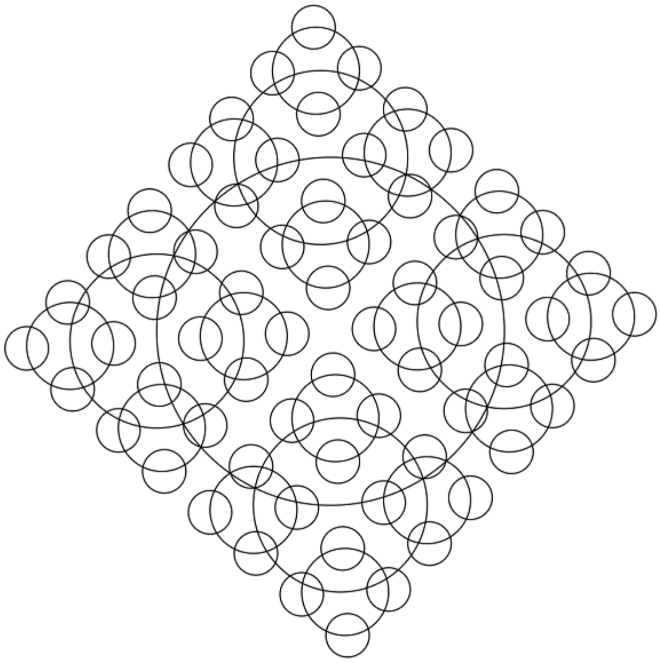
Ca nous a étonnés mais en fait, la longueur de la côte n'est pas infinie dans la réalité. C'est simplement que le flocon est le modèle qui fonctionne le plus pour mieux la comprendre.

IV) **<u>Construction de figures fractales originales</u>**

Certains d'entre nous ont eu l'idée de construire une figure en s'inspirant de la structure du triangle de Sierpinski, notamment des hexagones, des carrés et des flocons fractals à « bourgeons » circulaires.



Réalisation d’élève



Réalisation sur Geogebra d’une figure jusqu’à la troisième itération, à partir du dessin fait par un groupe de trois élèves

CONCLUSION

La nature a plein d’objets morcelés et irréguliers.

Les mathématiques ont développé la théorie des fractales pour pouvoir mieux comprendre et représenter ces éléments.

Certains de ces objets sont encore aujourd’hui très mystérieux et intéressants à étudier.

RESUME

Nous avons cherché à comprendre comment représenter des éléments de la nature qui semblent sans rapport avec les mathématiques, et nous avons donc tenté de répondre à la problématique :

« Comment utiliser les mathématiques pour représenter et mieux comprendre les objets au contour irrégulier du monde qui nous entoure ? »

Nous avons découvert le triangle de Sierpinski, la courbe du dragon, l'arbre de Pythagore et le flocon de von Koch, ainsi que des dimensions et des situations étonnantes.

Les fractales nous ont donné le vertige parce que même en zoomant à l'infini, on retrouve le même aspect général. On a aussi été étonnés par des paradoxes mathématiques.

Les fractales sont une bonne solution pour représenter les contours naturels morcelés mais restent des modèles théoriques. Ce domaine scientifique, qui a beaucoup d'applications dans notre vie courante, est encore en plein développement.