MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Antilles – Guyane – Saint-Pierre-et-Miquelon – Amériques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassées.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD,...) doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices nationaux. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice (exercice 2 ou 3 selon votre catégorie) quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé national comporte 7 pages.

WOLFRAM Google Inria inventeurs du monde numérique Maplesoft Mathematics • Modeling • Simulation
Animath Association pour l'animation mathématique CASIO Texas Instruments Crédit Mutuel Enseignant
Institut Polytechnique de Paris École Polytechnique ENSTA École nationale des Ponts et Chaussées ENSAE Telecom Paris Telecom SudParis

Exercice 1 (tous les candidats)

Mathématiques récréatives

On trouve des énoncés de *Propositions pour aiguiser la perspicacité des jeunes* dès le règne du roi Charlemagne avec des casse-têtes d'Alcuin (735-804), moine et pédagogue, engagé par le roi comme précepteur. Plus tard, au XVIIe siècle, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581 – 1638) et Jacques Ozanam (1640-1718) reprennent ces récréations mathématiques et en font des livres à succès. Voici ici quelques problèmes historiques, s'inscrivant dans le même esprit, bien sûr ré-écrits dans la langue d'aujourd'hui.

1. *Le gendarme et le voleur.* Un voleur en s'enfuyant parcourt 8 km par jour. Un agent le poursuit : il n'a fait que 3 km le premier jour, mais il en fait 5 le second, 7 le troisième et ainsi de suite en augmentant de jour en jour son trajet de 2 km par jour. En combien de jours l'agent atteindra-t-il le voleur et combien de km auront alors été parcourus par chacun d'entre eux ?

2. *Chèvre, loup, choux.* Un passeur doit faire traverser un fleuve à un loup, une chèvre et une botte de choux, tous initialement du même côté de la rive. Une seule barque permet de faire la traversée et la barque ne peut contenir que le passeur seul ou accompagné – au choix – du seul loup, de la seule chèvre ou de la seule botte de choux. Sachant que loup mange la chèvre s'ils sont laissés seuls ensemble et que la chèvre mange la botte de choux si elles sont laissées seules ensemble, comment le passeur doit-il procéder pour les faire tous traverser ?

3. *Oh les chameaux !* Un chameau (miniature) a la possibilité de transporter 1 litre d'eau *au maximum* et, s'il le souhaite, d'en offrir à un congénère dans la mesure où ce dernier a la capacité d'en recevoir. On convient qu'avec 1 litre d'eau, un chameau parcourt 1 km. Dans ces conditions, si deux tels chameaux partent et voyagent ensemble, on peut imaginer qu'au bout, par exemple, de $0{,}7$ km, l'un des chameaux donne à l'autre toute l'eau qui lui reste (0,3 litres) en se sacrifiant. Celui qui reste dispose alors de $0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$ litres, lui permettant de parcourir encore $0{,}6$ km : il aura donc parcouru $0{,}7 + 0{,}6 = 1{,}3$ km.

a. Quand deux chameaux partent et voyagent ensemble, chacun initialement chargé de 1 litre, pourquoi n'est-il pas possible à l'un de donner l'eau qui lui reste à l'autre au bout de 0,2 km ?

b. Quelle stratégie mettre en place pour que l'un des deux chameaux puisse parcourir 1,5 km ?

c. Trois chameaux, désignés par des numéros (numéro 1, numéro 2, numéro 3) partent et voyagent ensemble, chacun initialement chargé de 1 litre. Au bout de $\frac{2}{3}$ de km, numéro 3 offre à chacun des numéro 1 et numéro 2 la quantité $\frac{1}{6}$ de litre d'eau. Pourquoi est-ce possible ? Et pourquoi numéro 3 se sacrifie-t-il alors ? Puis numéro 1 et numéro 2 poursuivent leur chemin : ils accomplissent ensemble encore $\frac{1}{4}$ de km, avant que numéro 2 n'offre à numéro 1 la quantité d'eau qui lui reste. Au total, quelle distance aura parcouru numéro 1 ?

d. Cette fois, $n \geq 2$ chameaux (numéro 1, numéro 2,…, numéro n) partent et voyagent ensemble, chacun initialement chargé de 1 litre. Quelle stratégie permettrait à numéro 1 de parcourir

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{km} \ \ ?$$

4. *Dominos.* On se donne un entier naturel $N \geq 3$. On appelle domino toute paire $\{a, b\}$ d'entiers différents et compris entre 1 et N. Les entiers a et b sont appelés les côtés du domino. Par exemple, $\{1,2\}$ et $\{1, N\}$ sont des dominos (ayant 1 et 2 comme côté pour le premier, 1 et N comme côtés pour le second), mais pas $\{0,1\}$ (à cause du 0) ni $\{1,1\}$ (à cause de la répétition du 1).

À noter que deux dominos $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont égaux si et seulement si ($a = c$ et $b = d$) ou ($a = d$ et $b = c$), c'est-à-dire si et seulement si, quitte à les tourner, ils ont les mêmes côtés.

Par exemple, $\{1,3\}$ et $\{3,1\}$ désignent le même domino tandis que $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$ sont deux dominos différents.

On note D_N l'ensemble des dominos dont les côtés sont entre 1 à N. Ainsi D_3 contient $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ et D_4 contient $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.

a. Pour tout entier a compris entre 1 et N, donner la forme des dominos de D_N dont l'un des côtés est a. Combien y en a-t-il ?

b. En déduire que D_N comporte exactement $\frac{N(N-1)}{2}$ dominos.

On appelle chaîne de dominos toute suite

$$C = (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{K-1}, b_{K-1}), (a_K, b_K)$$

telle que :

$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_{K-1}, b_{K-1}\}, \{a_K, b_K\}$ sont des dominos deux à deux différents, et

$b_1 = a_2,\ b_2 = a_3, \dots,\ b_{K-1} = a_K$. Ainsi les dominos ne peuvent-être utilisés qu'une fois, et doivent être disposés dans un sens précis. Par exemple, $(1,3), (3,4), (4,2)$ est une chaîne de dominos qui contient, entre autres, le domino $\{1,3\}$. En revanche, $(1,3), (3,4), (4,2), (2,3), (3,1)$ n'est pas une chaîne de dominos puisque les dominos $\{1,3\}$ et $\{3,1\}$ sont égaux. À noter que, bien que $\{1,3\}$ et $\{3,1\}$ désignent le même domino, $(1,3), (3,2)$ est une chaîne de dominos (contenant le domino $\{1,3\}$) mais pas $(3,1), (3,2)$.

On suppose que l'on dispose d'une chaîne de dominos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{K-1}, b_{K-1}), (a_K, b_K)$$

contenant exactement tous les éléments de D_N, c'est à dire que $K = \frac{N(N-1)}{2}$, avec $N \geq 3$.

c. Justifier qu'il existe un entier d compris entre 1 et N tel que $d \neq a_1$ et $d \neq b_K$.

d. Justifier que le nombre de fois où l'entier d apparaît dans la chaîne de dominos est pair.

e. En déduire, dans ce cas, que l'entier N est impair.

f. Donner une telle chaîne quand $N = 3$, puis quand $N = 5$.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

En moyenne

1. On rappelle que la vitesse moyenne sur un déplacement vaut le rapport de la distance totale parcourue sur le temps total mis pour parcourir cette distance. Nous étudions ici la vitesse moyenne d'un athlète selon la nature de son entraînement.

a. *L'athlète effectue un « entraînement au temps (typiquement, en extérieur) »* : il parcourt pendant 1 heure une première distance à la vitesse v_1, puis pendant une deuxième heure une seconde distance à la vitesse v_2. Son effort dure donc, en totalité, 2 heures. Justifier que sa vitesse moyenne sur la totalité du déplacement est

$$\frac{v_1 + v_2}{2}$$

b. *L'athlète effectue un « entraînement en distance (typiquement, en stade ou en bassin, où les distances sont bien balisées) »* : il parcourt 1 km à la vitesse v_1, puis un deuxième kilomètre à la vitesse v_2. Il parcourt donc, en totalité, la distance de 2 km. Justifier que sa vitesse moyenne sur la totalité du déplacement est

$$\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

c. Pour a et b deux réels strictement positifs, on note

$$\mathcal{A}(a,b) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

appelés respectivement *moyenne arithmétique* (d'où la lettre $\mathcal{A}$) et *moyenne harmonique* (d'où la lettre $\mathcal{H}$) de a et b. Ainsi,

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \mathcal{A}(v_1, v_2)$$

Exprimer de même $\frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$, cette fois à l'aide d'une moyenne harmonique, et vérifier que

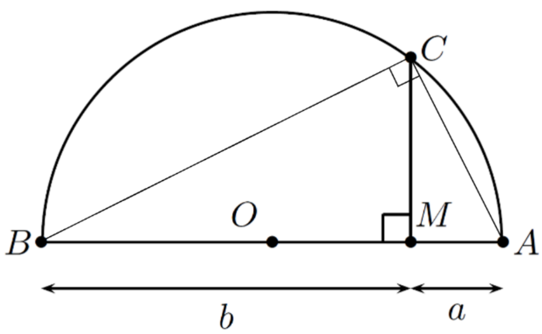
$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

d. Calculer puis comparer $\mathcal{A}(2,3)$ et $\mathcal{H}(2,3)$.

e. De manière générale, démontrer que pour a et b deux réels strictement positifs on a toujours

$$\mathcal{H}(a,b) \leq \mathcal{A}(a,b)$$

Les questions suivantes donnent une autre approche, graphique cette fois, pour moyenner deux nombres $a, b > 0$. Ces nombres étant interchangeables, on supposera dans toute la suite que $b \geq a > 0$. Ci-contre, on a représenté le demi-cercle de diamètre $AB = a + b$ et de centre O (sous l'hypothèse $b \geq a > 0$). M est le point du segment $[OA]$ tel que $AM = a$ et C est le point du demi-cercle tel que les droites (CM) *et* (AB) soient perpendiculaires. On pourra remarquer que le triangle BCA est rectangle en C. On note



$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{ab}$$

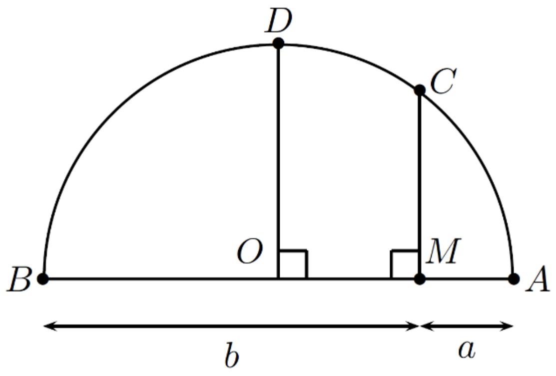
qu'on appelle la moyenne géométrique de a et b.

2. Justifier que $OA = \frac{a+b}{2}$ et que $OM = \frac{b-a}{2}$.

3. Démontrer que $MC = \mathcal{G}(a,b)$ (on pourra remarquer, en le justifiant, que les triangles BMC et CMA sont semblables, ou utiliser toute autre méthode). En déduire que

$$\mathcal{G}(a,b) \leq \mathcal{A}(a,b)$$

4. Soit D le point du demi-cercle situé à la verticale du point O, comme dans la figure ci-contre.



Démontrer que $DM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. On note désormais $\mathcal{Q}(a,b)$ ce nombre, appelé aussi *moyenne quadratique* de a et b. En déduire que

$$\mathcal{A}(a,b) \leq \mathcal{Q}(a,b)$$

5. On note H le point appartenant au segment $[OC]$ tel que le triangle CHM soit rectangle en H (autrement dit, H est le projeté orthogonal de M sur le segment $[OC]$).

Exprimer HM^2 à l'aide de OH et HC.

En déduire que $HC = \mathcal{H}(a,b)$ puis que

$$\mathcal{H}(a,b) \leq \mathcal{G}(a,b)$$

et enfin que

$$0 \leq \mathcal{A}(a,b) - \mathcal{H}(a,b) \leq \frac{b-a}{2}$$

6. On suppose toujours que $0 < a \leq b$ on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \mathcal{H}(a_n, b_n) = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \mathcal{A}(a_n, b_n) = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{a_nb_n} = \mathcal{G}(a_n, b_n)$$

Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq \mathcal{G}(a,b) \leq b_n$.

7. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $b_n - a_n$? Et pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une méthode pour approcher la racine carrée d'un entier $b \geq 2$ donné à l'aide d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

En moyenne

1. On rappelle que la vitesse moyenne sur un déplacement vaut le rapport de la distance totale parcourue sur le temps total mis pour parcourir cette distance. Nous étudions ici la vitesse moyenne d'un athlète selon la nature de son entraînement.

a. *L'athlète effectue un « entraînement au temps (typiquement, en extérieur) »* : il parcourt pendant 1 heure une première distance à la vitesse v_1, puis pendant une deuxième heure une seconde distance à la vitesse v_2. Son effort dure donc, en totalité, 2 heures. Justifier que sa vitesse moyenne sur la totalité du déplacement est

$$\frac{v_1 + v_2}{2}$$

b. *L'athlète effectue un « entraînement en distance (typiquement, en stade ou en bassin, où les distances sont bien balisées) »* : il parcourt 1 km à la vitesse v_1, puis un deuxième kilomètre à la vitesse v_2. Il parcourt donc, en totalité, la distance de 2 km. Justifier que sa vitesse moyenne sur la totalité du déplacement est

$$\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

c. Pour a et b deux réels strictement positifs, on note

$$\mathcal{A}(a,b)=\frac{a+b}{2} \text{ et } \mathcal{H}(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$$

appelés respectivement *moyenne arithmétique* (d'où la lettre $\mathcal{A}$) et *moyenne harmonique* (d'où la lettre $\mathcal{H}$) de a et b. Ainsi,

$$\frac{v_1+v_2}{2}=\mathcal{A}(v_1,v_2)$$

Exprimer de même $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$, cette fois à l'aide d'une moyenne harmonique, et vérifier que

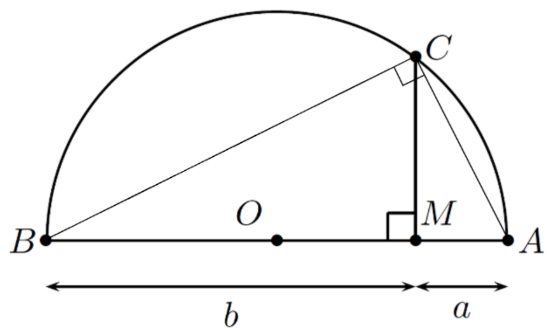
$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

d. Calculer puis comparer $\mathcal{A}(2,3)$ et $\mathcal{H}(2,3)$.

e. De manière générale, démontrer que pour a et b deux réels strictement positifs on a toujours

$$\mathcal{H}(a,b)\leq\mathcal{A}(a,b)$$

Les questions suivantes donnent une autre approche, graphique cette fois, pour moyenner deux nombres $a,b>0$. Ces nombres étant interchangeables, on supposera dans toute la suite que $b\geq a>0$. Ci-contre, on a représenté le demi-cercle de diamètre $AB=a+b$ et de centre O (sous l'hypothèse $b\geq a>0$). M est le point du segment $[OA]$ tel que $AM=a$ et C est le point du demi-cercle tel que les droites (CM) *et* (AB) soient perpendiculaires. On pourra remarquer que le triangle BCA est rectangle en C. On note



$$\mathcal{G}(a,b)=\sqrt{ab}$$

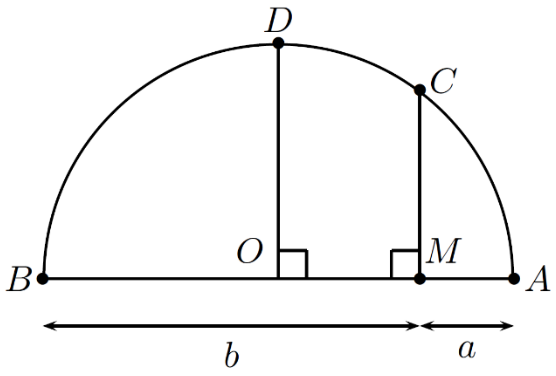
qu'on appelle la moyenne géométrique de a et b.

2. Justifier que $OA=\frac{a+b}{2}$ et que $OM=\frac{b-a}{2}$.

3. Démontrer que $MC=\mathcal{G}(a,b)$ (on pourra remarquer, en le justifiant, que les triangles BMC et CMA sont semblables, ou utiliser toute autre méthode). En déduire que

$$\mathcal{G}(a,b)\leq\mathcal{A}(a,b)$$

4. Soit D le point du demi-cercle situé à la verticale du point O, comme dans la figure ci-contre.



Démontrer que $DM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. On note désormais $\mathcal{Q}(a,b)$ ce nombre, appelé aussi *moyenne quadratique* de a et b. En déduire que

$$\mathcal{A}(a,b) \leq \mathcal{Q}(a,b)$$

5. On note H le point appartenant au segment $[OC]$ tel que le triangle CHM soit rectangle en H (autrement dit, H est le projeté orthogonal de M sur le segment $[OC]$).

Exprimer HM^2 à l'aide de OH et HC.

En déduire que $HC = \mathcal{H}(a,b)$ puis que

$$\mathcal{H}(a,b) \leq \mathcal{G}(a,b)$$

et enfin que

$$0 \leq \mathcal{A}(a,b) - \mathcal{H}(a,b) \leq \frac{b-a}{2}$$