MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

RÉGION ACADÉMIQUE
GUADELOUPE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Antilles - Guyane – Amériques

Mercredi 19 mars 2025 de 8 h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices académiques.
À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices nationaux, débute après cette pause.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Chaque partie de l'épreuve contient trois exercices. Pour chacune des parties :

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

Chaque équipe rend une seule copie

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10h00.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus avec les copies

Exercice académique n° 1 : Le jeu 2048

(À traiter par tous les candidats)

Dans tout l'exercice, on appellera puissance de 2, un nombre de la forme 2^k avec k **entier naturel**. La liste des puissances de 2 , utilisée dans l'exercice est donc :
$2^0 = 1;\ 2^1 = 2;\ \ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ \ 2^4 = 16; \dots$ et ainsi de suite.
Le célèbre jeu 2048 est basé sur cette liste de puissances de 2.

Partie A: Puissances de 2 et partitions binaires d'un entier naturel

Soit A un entier strictement positif, toute écriture de A sous la forme de la somme de puissances de 2 sera appelée partition binaire de A. Pour simplifier l'écriture, on omettra parfois l'adjectif binaire après le mot partition.
Par exemple le nombre 5 possède plusieurs partitions binaires, car :

$$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1} \qquad \mathbf{5 = 2 + 1 + 1 + 1}$$
$$\mathbf{5 = 2 + 2 + 1} \qquad \mathbf{5 = 4 + 1}$$

Comme on ne change pas une somme en changeant l'ordre de ses termes,
$\mathbf{2 + 2 + 1}$; $\mathbf{2 + 1 + 2}$ **et** $\mathbf{1 + 2 + 2}$ sont trois écritures de la même partition de 5.

1. Donner toutes les partitions binaires de 7.
2. Donner toutes les partitions binaires de 8.
3. Montrer que tout entier A, strictement positif, possède au moins une partition binaire.

On appelle longueur d'une partition, le nombre de termes composant cette somme.
Ainsi si on considère certaines partitions du nombre 5,

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$: cette partition de 5 est de longueur 5,
$5 = 4 + 1$: cette partition de 5 est de longueur 2 .
De plus les termes de cette dernière partition de 5 sont distincts deux à deux.

Dans la suite de l'exercice, quand on parlera d'une partition d'un entier A de la forme $A = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, il sera toujours sous-entendu que $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_k$.

4. Quelle est la plus grande longueur possible pour la partition d'un entier A ?
5. Dans cette question, nous allons étudier comment déterminer la partition de plus petite longueur possible d'un entier A strictement positif.

a) Si A est une puissance de 2, quelle est la longueur de la plus courte partition de A ?

b) Démontrer que si, dans une partition d'un entier strictement positif A, deux termes sont égaux, alors il existe une partition plus courte de A.

c) Que peut-on en déduire concernant les termes d'une partition de longueur minimale d'un entier ?

d) Soit $P = 2^k$, k étant un entier naturel non nul, une puissance de 2. Démontrer que la somme de toutes les puissances de 2 strictement plus petites que P est égale à $P - 1$.

Soit un entier $A \geq 1$. On admet qu'il n'existe qu'une seule partition de A sans répétition de la forme $A = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, cette partition de A, étant construite avec l'algorithme suivant :

- u_1 est la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas A,
- u_2 la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas $A - u_1$,
- u_3 est la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas $A - u_1 - u_2$,
- et ainsi de suite.

On admet également que cette partition de A est celle dont la longueur est minimale.

e) Déterminer la partition de longueur minimale du nombre $A = 2025$:

Partie B : Écriture des entiers en base 2

<u>Un exemple</u> : On considère l'entier B = 30 et on part de sa représentation binaire sans répétition donnée ci-dessous :

$$30 = 16 + 8 + 4 + 2.$$

On écrit, sur la 1ère ligne, la liste des puissances de 2, inférieures ou égale à B = 30, dans l'ordre décroissant.

16	8	4	2	1

Sous cette ligne, en dessous de chaque puissance de 2 du tableau:

- on écrit un « 1 » si cette « puissance de 2 » figure dans la partition binaire la plus courte de B,
- on inscrit un « 0 » si ce n'est pas le cas.

16	8	4	2	1
1	1	1	1	0

La suite des chiffres de la deuxième ligne $\mathbf{11110}$ est appelée écriture binaire du nombre B = 30.
Cette écriture traduit l'égalité suivante : $30 = \mathbf{1} \times 16 + \mathbf{1} \times 8 + \mathbf{1} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0} \times 1$.

1. Donner l'écriture binaire de $A = 2\,025$.
2. Déterminer l'écriture binaire de $C = 12\,342$.
3. On considère le nombre D dont l'écriture binaire est 1001101. Déterminer la valeur de D.

Partie C : Application au jeu 2048

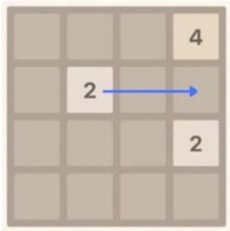
Le jeu 2048 se joue sur une grille 4×4. L'objectif du jeu est de faire apparaitre sur la grille l'insaisissable tuile 2048 , en essayant à chaque étape, de fusionner, par glissement des tuiles de même valeur.

Dans la grille de départ figurent seulement deux tuiles de valeurs 2. À chaque étape du jeu, on effectue un mouvement de glissement horizontal, vers la gauche ou vers la droite, ou vertical, vers le haut ou vers le bas. Ce mouvement déplace l'ensemble des tuiles présentes sur la grille aussi loin que possible dans la direction du glissement. À chaque glissement :

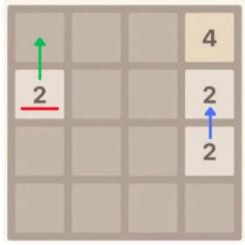
- une nouvelle tuile apparaît sur un emplacement vide, soit un 2, soit un 4.
- si deux tuiles de même valeur entrent en collision, elles fusionnent en une seule tuile de valeur égale à leur somme et libèrent une place.

Le jeu s'arrête quand toute la grille est occupée par des tuiles et qu'aucun nouveau glissement n'est possible.

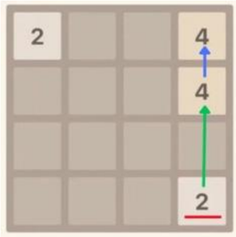
Exemple de séquences de jeu



À partir de la grille de début de séquence, on fait glisser les tuiles vers la droite et …



une nouvelle tuile apparaît (trait rouge). On fait glisser toutes les tuiles vers le haut et…



une nouvelle tuile apparaît (en rouge) tandis que les deux tuiles 2 adjacentes fusionnent pour donner un 4.

En poussant toutes les tuiles vers le haut, les deux tuiles 4 fusionnent et donnent un 8 tandis qu'une nouvelle tuile apparaît (en rouge)

Dans la dernière grille de l'exemple ci-dessus, la somme des tuiles est égale à 14 .
Les tuiles de cette grille sont des puissances de 2 , ce qui donne une partition binaire de la somme :

$$14 = 8 + 2 + 2 + 2.$$

À toute grille du jeu 2048, on peut associer l'entier $\boldsymbol{S}$ qui est la somme des entiers figurant sur la grille. Comme les entiers figurant sur la grille sont des puissances de 2, alors ils sont les termes d'une partition binaire du nombre $\boldsymbol{S}$.

1. Justifier que S est un nombre pair.

Le but des questions suivantes est de démontrer que la plus grande puissance de 2 pouvant figurer sur la grille du jeu 2048 est inférieure au nombre $2^{17} = 131072$, en prouvant que la somme S ne peut pas atteindre la valeur $262\ 144$.

À chaque glissement, avec l'ajout d'une nouvelle tuile par la machine, « 2 » ou « 4 », la valeur de $\boldsymbol{S}$ augmente de la valeur de cette tuile (2 ou 4). A noter que le remplacement, lors de ce glissement, de deux tuiles contenant le nombre x par une seule tuile contenant le nombre $2x$ ne change pas la valeur de $\boldsymbol{S}$.

Supposons que la somme $\boldsymbol{S}$ puisse prendre, après un glissement, la valeur 262 144 dans une grille du jeu. La valeur de la somme avant ce glissement était :

$$\boldsymbol{S_0 = 262\ 144 - 2} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{S_0 = 262\ 144 - 4}$$

2. Étude du cas $\boldsymbol{S_0 = 262144 - 2}$

- **a)** Donner la plus courte partition binaire de 262142.
- **b)** Quelle est la longueur de cette partition binaire?
- **c)** Est-il possible de remplir une grille de jeu 2048 avec cette partition binaire?

3. Est-il possible de remplir une grille de jeu 2048 avec une partition binaire de 262 140?

4. Conclure

Théoriquement, la plus grande puissance de 2 pouvant figurer sur la grille du jeu 2048 est le nombre $2^{17} = 131072$. Mais, bien entendu, en pratique, il faudrait une chance inouïe pour que l'enchaînement des réponses soient satisfaisantes pour atteindre ce résultat.

Exercice académique n°2 : Le flocon de VON KOCH

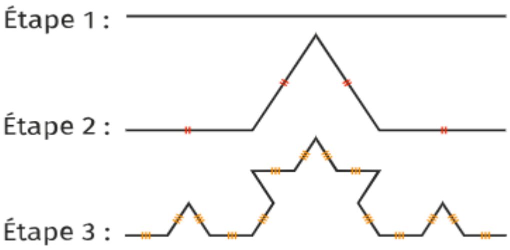
(*À traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématiq*ues)

Une figure **fractale** est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles. La courbe de **Von Koch** est l'une des premières courbes fractales à avoir été publiée dans une revue scientifique, bien avant l'invention du terme « fractal ».

Afin de construire cette figure fractale, on part d'un triangle équilatéral et, à chaque étape, on applique à chaque côté le même programme de construction :

On partage le côté en trois segments de longueurs égales puis on remplace le segment du milieu par un triangle équilatéral dont on efface la base.

Voici, ci-dessous, les 3 premières étapes de construction pour un côté.



On obtient alors, ci-dessous les 3 premières étapes de la construction du flocon de Von Koch:

Partie A : Nombre de côtés du flocon

À l'étape 1, le flocon possède 3 côtés.

1. **1.** Déterminer le nombre de côtés du flocon aux étapes 2 ; 3 et 4.
2. **2.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note c_n le nombre de côtés du flocon à l'étape n. Donner les valeurs de c_1; c_2 et c_3.
3. **3.** Démontrer que la suite (c_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
4. **4.** Exprimer c_n en fonction de n.

Partie B : Périmètre du flocon

À l'étape 1, on part d'un triangle équilatéral de côté 1 mètre. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note p_n le périmètre du flocon à l'étape n.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note l_n la longueur d'un côté du flocon à l'étape n. Ainsi l_1=1.

1. **1.** Déterminer l_2 et l_3.
2. **2.** Exprimer l_n en fonction de n.
3. **3.** En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
4. **4.** Le périmètre du flocon, peut-il dépasser 100 km ? Si oui, à quelle étape.
5. **5.** Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie C : Aire d'un flocon

1. Calculer l'aire du flocon à l'étape 1. On rappelle que le côté du triangle équilatéral mesure 1 mètre.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note a_n l'aire d'un triangle équilatéral ajouté à l'étape n.
   a. Pour tout entier naturel, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
   b. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'aire du flocon à l'étape n.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n.

On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{9^1} + \frac{3 \times 4^1}{9^2} + \frac{3 \times 4^2}{9^3} + \cdots + \frac{3 \times 4^{n-2}}{9^{n-1}}\right)$$

4. En déduire une autre expression de A_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
5. L'aire du flocon, peut-il dépasser $1\ m^2$? En quoi cela peut-il paraitre surprenant ?

Exercice académique n°3 : Les calendriers

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

Dans cet exercice, on se propose de trouver le jour la semaine, associé à une date donnée. Pour cela, on utilise le calendrier actuel, appelé calendrier grégorien, imposé en France par le Pape Grégoire XII depuis 1582. Dans ce calendrier, certaines années, appelées années bissextiles comprennent 366 jours, les autres années comportent 365 jours.
Une année est bissextile, si le nombre désignant l'année est « **divisible par 400** » ou **« divisible par 4 et non divisible par 100 »**.

On justifiera toutes les réponses.

Partie A : Étude de quelques années

1. L'année 2000 était - elle bissextile ?
2. Déterminer le nombre de jours de l'année 2025.
3. Recopier et compléter le script python suivant qui, grâce à la fonction bissextile, détermine si une année rentrée au clavier est bissextile et l'indique par une phrase.

```
def bissextile(annee):
  if (annee % 4 == 0 and annee % 100 != 0) or (annee % 400 ==0):
    return ..............
  else:
    return ..............

annee = int (input("Veuillez entrer une année: "))
if bissextile(annee):
  print("......................................")
else:
  print("......................................")
```

4. Quel sera le résultat du script si on l'applique à l'année 2100 ?

Partie B : Étude de quelques dates

Une année contient 12 mois. L'année est aussi divisée en semaines. Une semaine compte 7 jours : lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi et dimanche. Ainsi le 2ème jour après un vendredi est un dimanche.

1. Quel est le nom du 45ème jour après un vendredi ?
2. Sachant que le 1er janvier 2015 est un jeudi, vérifier que le 1er janvier 2017 est un dimanche.
3. On sait que le 1er janvier 2000 était un samedi, et on cherche à connaitre le jour correspondant au 1er janvier 2401.

a. Montrer que 2200 n'est pas bissextile.
b. Quelles sont les autres années multiples de 4 non bissextiles entre 2000 et 2401 ?
c. Déterminer le nombre d'années bissextiles, puis de jours entre le 1er janvier 2000 et 1er janvier 2401. En déduire le jour correspondant au 1er janvier 2401.

On rappelle que le mois de février d'une année bissextile a 29 jours. Dans une année non bissextile, le mois de février a 28 jours.

4. Déterminer le jour correspondant au 30 janvier 1952.
5. Aimé Césaire (écrivain martiniquais) est né le 26 juin 1913. Quel est son jour de naissance ?