Les nouveaux programmes de l'école primaire

Mathématiques
Document d'accompagnement

Résolution de problèmes et apprentissage
Des solutions personnelles vers les solutions expertes

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
Direction de l'Enseignement scolaire
eduscol.education.fr

Résolution de problèmes et apprentissage
Des solutions personnelles vers les solutions expertes

Les textes introductifs des documents d'application pour les cycles 2 et 3 évoquent, à propos de la résolution de problèmes, la distinction entre *solutions personnelles* et *solutions expertes*.

L'objectif de ce texte, assez bref, est d'apporter quelques précisions à ce sujet :
- pour clarifier ce que recouvrent ces deux expressions ;
- pour préciser comment elles permettent de repenser les enjeux de l'activité de résolution de problèmes ;
- pour indiquer quelques pistes pour un travail orienté vers un apprentissage de nouvelles connaissances et donc pour aider les élèves à s'approprier un *mode de résolution expert* en prolongement des *modes de résolution personnels* mobilisés auparavant ou en rupture avec ceux-ci.

1. Solution personnelle, solution experte

Dans le document d'application des programmes, le terme *solution* est utilisé dans un sens peut-être un peu inhabituel. Il ne désigne pas la réponse au problème, mais la stratégie, la démarche, les procédures mises en œuvre pour y parvenir. C'est la signification qui lui est également donnée dans ce document.

Voici deux exemples de problèmes destinés à des élèves de la fin du cycle 3 et qui permettent de préciser la distinction entre *solution personnelle* et *solution experte*.

Problème 1 (extrait de l'évaluation à l'entrée en Sixième, 2002)

Emma a un paquet de bonbons. Elle donne 8 bonbons à chacun de ses cinq camarades. Il lui en reste 3. Combien y avait-il de bonbons dans le paquet ?

On attend d'un élève de fin de cycle 3 qu'il détermine les deux étapes de la résolution : déterminer le nombre de bonbons donnés, puis le nombre de bonbons qu'il y avait dans le paquet. À partir de là, on attend que, pour calculer le nombre de bonbons distribués, il utilise le produit de 8 par 5 (mémorisé) et qu'ensuite il additionne 40 et 3 pour fournir la réponse. Il utilise alors le même raisonnement et les mêmes calculs que ceux qu'utiliserait une personne experte. On parle alors de *solution experte*.

S'il a compris la situation et la question posée et si, pour la première étape, il ne reconnaît pas que le recours au produit de 8 par 5 est efficace (ou s'il a oublié le résultat), il peut utiliser d'autres modes de résolution, comme calculer $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ ou même schématiser les 5 groupes de 8 bonbons et procéder à un dénombrement. Il utilise un mode de résolution correct, mais différent de celui mis en œuvre par une personne experte. On parle alors de *solution personnelle*.

On peut être étonné que, étant donné la variété et la « simplicité » des connaissances mathématiques mises en jeu aussi bien dans la solution experte que dans les solutions personnelles, plus d'un quart des élèves soient en difficulté face à ce problème. Une hypothèse plausible peut être avancée : ne reconnaissant pas immédiatement quelle *solution experte* peut être utilisée, certains élèves n'envisagent pas de se lancer dans l'élaboration d'une *solution personnelle* (ou n'osent pas le faire).

Problème 2

Les élèves d'une école ont réalisé une grande fresque de forme carrée en assemblant 196 petits tableaux réalisés sur des panneaux de bois tous identiques et eux aussi de forme carrée. Combien de panneaux y a-t-il sur chaque côté de la fresque ?

S'ils comprennent la situation, les élèves de fin de cycle 3 disposent de connaissances sur la multiplication qui leur permettent d'envisager que la réponse est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 196. Mais ils ne disposent pas encore de la notion de racine carrée; ils ne peuvent donc pas utiliser la *solution experte* qui consiste, par exemple, à utiliser la touche [√] d'une calculatrice.
Ils peuvent cependant résoudre ce problème en mobilisant des connaissances disponibles, par des essais de produits, par des essais de sommes itérées d'un même terme (avec le risque de ne pas aboutir !) ou même en tentant une schématisation de la fresque. Ils ont donc, à ce moment de leur scolarité, nécessairement recours à des *solutions personnelles* pour traiter ce problème qui peut être classé dans la catégorie des *problèmes pour chercher*.
La distinction entre *solution personnelle* et *solution experte* semble donc simple. En réalité, elle l'est moins qu'il n'y paraît. D'autres paramètres que les connaissances utilisées sont en effet à prendre en compte pour déterminer le caractère expert d'une solution, comme le montrent les deux problèmes suivants.

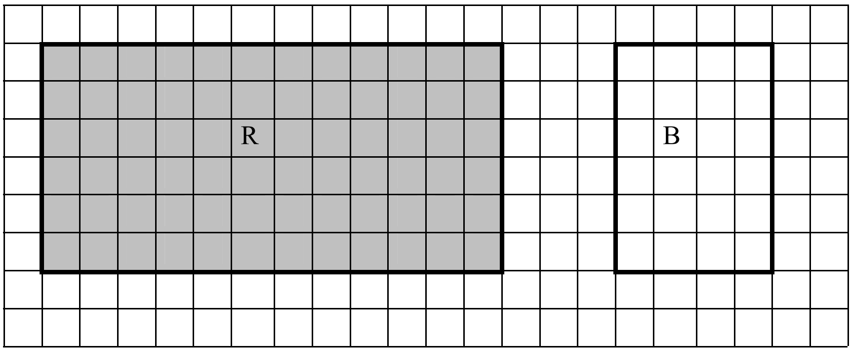
Problème 3

Un autocar qui peut transporter 60 personnes est complet.
45 adultes y sont installés. Tous les autres passagers sont des enfants.
Combien y a-t-il d'enfants dans l'autocar ?

Une personne experte calcule mentalement soit le complément de 45 à 60, soit la différence entre 60 et 45 : ce sont donc deux *solutions expertes*. Il n'existe donc pas nécessairement une seule *solution experte* pour un problème déterminé !
Si le même problème était posé avec un train, lui aussi complet, qui peut transporter 926 personnes et dans lequel sont déjà installés 389 adultes, un expert muni d'une calculatrice (ou d'une feuille de papier et d'un crayon) utiliserait sans doute la soustraction et non le complément.
Une personne experte est ainsi capable de choisir, entre plusieurs résolutions possibles, celle qui est la plus efficace, en sachant que, dans certains cas, différentes résolutions présentent le même niveau d'efficacité. L'expertise de cette personne se caractérise par le fait qu'elle est capable :

- de reconnaître la validité de plusieurs résolutions différentes, et donc leur équivalence du point de vue de leur adéquation au problème posé ;
- de juger de l'économie de chaque solution pour faire un choix adapté

Problème 4 (inspiré de l'évaluation à l'entrée en sixième, 2000)



Complète la phrase ci-dessous à l'aide d'une fraction choisie dans la liste suivante :

$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

L'aire du rectangle B est égale à … de l'aire du rectangle R.

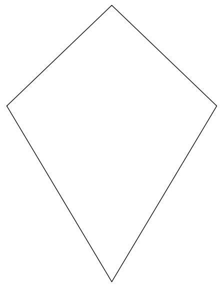
Là encore, compte tenu des dimensions et de la disposition des rectangles, un expert pourrait avoir recours à au moins deux solutions différentes (donc toutes deux considérées comme *solutions expertes*) :
- dénombrer le nombre de carreaux sur la longueur du rectangle R et le nombre de carreaux sur la largeur du rectangle B, puis déterminer le rapport de ces longueurs ;
- paver rapidement (à main levée) le rectangle R avec le rectangle B, puis déterminer le rapport de ces aires.

2. Encourager l'initiative

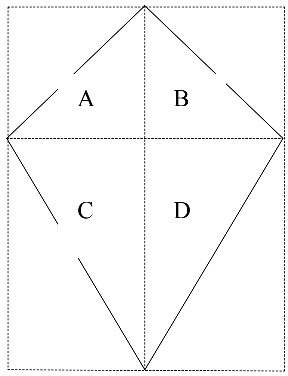
Depuis de nombreuses années, les programmes insistent sur la diversité des fonctions didactiques attribuées à la résolution de problèmes, Cependant, la tradition scolaire lui attribue une place bien particulière, souvent limitée au « problème d'application » que l'élève doit être capable de résoudre de manière experte, les connaissances nécessaires à cette résolution experte ayant été étudiées préalablement. Cet état de fait n'est pas sans conséquence. Il peut expliquer en partie qu'à l'âge de 15 ans, les élèves français obtiennent, en mathématiques, « *des résultats supérieurs à la moyenne de l'OCDE lorsqu'il s'agit d'exercices purement scolaires, mais cela n'est plus le cas lorsque la situation nécessite une prise d'initiative* »[1].
L'exemple suivant illustre comment il est possible de travailler, à l'école primaire, cette capacité à « prendre des initiatives ».

[1] Note d'information 01.52 de la Direction de la programmation et du développement : « Les élèves de 15 ans. Premiers résultats d'une évaluation internationale des acquis des élèves (PISA) ».

Il existe une formule qui permet d'obtenir l'aire d'un cerf-volant en calculant le demi-produit des longueurs de ses diagonales.



Mais, un novice, comme l'est un élève de CM2 pour ce problème, doit imaginer une méthode « originale ». Aidé ou non par l'enseignant qui se limite dans un premier temps de recueillir les différentes suggestions de la classe, il peut, par exemple, penser à inscrire le cerf-volant dans un rectangle, en faisant apparaître ses diagonales.



A partir de là, il existe plusieurs façons d'obtenir l'aire cherchée :

- calculer la somme des aires de 4 triangles rectangles, eux-mêmes reconnus comme des demi-rectangles ;
- considérer que les aires des surfaces A et B sont égales et que la somme de leurs aires est la même que celle du rectangle situé « en haut, à gauche » ; puis appliquer le même raisonnement pour les surfaces C e D ;
- remarquer que l'aire du cerf-volant est égale à la moitié de celle du rectangle dans lequel le cerf-volant est « inscrit » ;

Autant de *solutions personnelles* valides, imaginables et compréhensibles par des élèves de CM2. La dernière citée pourrait facilement être exploitée pour mettre en évidence la « formule », mais ce n'est pas l'objectif poursuivi. Il est plus intéressant, à ce niveau de la scolarité, de permettre aux élèves de prendre conscience qu'avec des connaissances réduites, de l'initiative et de l'imagination, il est possible de venir à bout de problèmes qui paraissent au départ complexes.
Concernant la résolution de problèmes, deux types d'objectifs complémentaires doivent donc être visés :

- rendre l'élève expert dans la résolution de certains problèmes pour lesquels il reconnaît rapidement le traitement approprié[2] ;
- rendre l'élève capable d'initiative pour d'autres problèmes, c'est-à-dire capable d'imaginer des solutions originales, de les tester et, en raisonnant, d'adapter ses connaissances pour traiter la situation proposée de manière personnelle, originale.

3. L'apprentissage des solutions expertes

Le plus souvent, l'élève ne passe pas spontanément des *solutions personnelles* aux *solutions expertes*. Ce passage nécessite un apprentissage et donc l'organisation de situations d'enseignement.
Ainsi, pour la catégorie de problèmes représentée par le problème 3 (recherche d'un complément), le programme prévoit qu'il doit pouvoir être résolu par des *procédures personnelles* à la fin du cycle 2 et que la *résolution experte* relève donc du cycle 3.

Rappelons l'énoncé du problème 3 :

[2] En fin de cycle, ce sont les problèmes qui sont placés dans le paragraphe « Procédures expertes » des documents d'application

Un autocar qui peut transporter 60 personnes est complet. 45 adultes y sont installés. Tous les autres passagers sont des enfants. Combien y a-t-il d'enfants dans l'autocar ?

La question se pose donc de savoir comment aider les élèves, en première année de cycle 3, à reconnaître que ce type de problème peut être résolu à l'aide d'une soustraction alors qu'ils l'envisagent « naturellement » plutôt comme un « problème d'addition » qui peut être modélisé par « combien faut-il ajouter à 45 pour obtenir 60 ? ». La *résolution experte* attendue (60 – 45 = ?) va donc à l'encontre de cette résolution « naturelle ».

Constater que les deux calculs aboutissent au même résultat, même si ce constat peut aider à comprendre l'équivalence du traitement, ne suffit en général pas à rendre fonctionnelle l'équivalence entre : « combien de 45 à 60 ? » et « quel est le résultat de 60 moins 45 ? ».

La question devient : comment provoquer les élèves à « penser » eux-mêmes cette équivalence ? Trois types d'expériences peuvent être suggérées.

L'appui sur des situations
Le premier type d'expériences s'appuie sur le fait que les élèves ont construit, au cycle 2, une signification élémentaire de la soustraction en résolvant des problèmes dans lesquels est demandé le résultat d'un retrait ou d'une diminution. Pour le type de problème considéré (recherche d'un complément), il est intéressant de les inciter à formuler un raisonnement au terme duquel le problème initial est transformé en un problème qu'ils savent résoudre à l'aide d'une soustraction. Ce raisonnement, exprimé verbalement, consiste à considérer, par exemple, que lorsque l'autocar est plein (avec 60 personnes), pour ne garder que les enfants, il faut faire descendre (donc retirer) les 45 adultes : le calcul 60 - 45 permet de prévoir le résultat de cette nouvelle action. Pour certains élèves, cette explication verbalisée peut être suffisante, mais ce n'est sans doute pas le cas pour tous.
Le recours à une expérience réelle, comme celle qui suit, est souvent utile pour soutenir cette explication. L'enseignant dispose d'une boîte dans laquelle il demande à un élève de mettre 37 cubes. Puis, devant les élèves, il prend sur le bureau une nouvelle poignée de cubes (sans dire combien aux élèves) qu'il met également dans la boîte. Après avoir dénombrer les cubes contenus dans la boîte et annoncer le résultat (52 cubes), il demande aux élèves de trouver combien de cubes il a lui-même mis dans la boîte. La plupart d'entre eux ont recours à des *solutions personnelles* consistant à rechercher le complément de 37 à 52, soit en dessinant les cubes, soit en recourant à un calcul qui leur permet de trouver ce qu'il faut ajouter à 37 pour obtenir 52. Une écriture, utilisée par certains, peut être associée à cette résolution : 37 + … = 52.
L'interrogation porte ensuite sur la validation des réponses trouvées : comment faire pour n'avoir dans la boîte qu'une quantité de cubes correspondant à celle qui a été ajoutée par l'enseignant. L'idée sera certainement émise qu'il suffit de retirer de la boîte 37 cubes. Incités à chercher le nombre de cubes que contient alors la boîte (avant de le vérifier effectivement), il est probable que certains élèves calculeront 52 – 37.
Ainsi, deux écritures peuvent être associées à la recherche de la réponse au problème initial :

- l'une de type « recherche de complément » qui correspond au problème posé au départ ;
- l'autre de type « soustraction » qui correspond au problème posé au moment de la validation.

Le commentaire formulé par l'enseignant prend alors tout son sens : pour chercher le nombre de cubes qui ont été ajouté dans la boîte, on peut :

- soit penser aux cubes qu'on a ajoutés et chercher le nombre qui, ajouté à 37, permet d'obtenir 52 ;
- soit imaginer qu'on enlève 37 cubes de la boîte et chercher le résultat de 52 – 37.

L'appui sur le calcul mental
Le deuxième type d'expériences concerne le calcul mental. Deux exemples suffisent pour l'évoquer.

- Si on demande de calculer mentalement 100 – 98, la solution la plus simple consiste à chercher le complément de 98 à 100 plutôt qu'à essayer de soustraire 98 de 100 : les élèves qui y ont recours utilisent alors « en actes » l'équivalence entre calcul d'une différence et recherche d'un complément : l'échange entre les élèves qui ont tenté des résolutions différentes permet de mettre en évidence que les deux procédures sont possibles, mais que la première est plus économique ;
- Inversement, si on demande de calculer mentalement le complément de 5 à 200, la solution la plus simple consiste à soustraire 5 de 200 : la même équivalence a été utilisée.

Ainsi demander de calculer une différence de faible écart (exemple 100-98) ou un complément d'un nombre à un autre beaucoup plus grand (de 5 à 200) serait propice à la construction des équivalences entre calcul d'une différence et recherche d'un complément.
Ces activités de calcul mental doivent être accompagnées de formulations orales qui aident à les rendre intelligibles : *Que faut-il ajouter à 45 pour avoir 60 ? Quel nombre obtient-on en soustrayant 45 de 60 ? Quelle est la différence entre 45 et 60 ?*
Les questions peuvent être posées directement sur les nombres ou à partir de « petits problèmes » que les élèves doivent résoudre mentalement.

L’appui sur les écritures symboliques

Le premier type d’expériences (à partir d’une matérialisation de la situation) permet de justifier l’équivalence alors que le deuxième type (calcul mental) permet de la faire fonctionner. Dans le prolongement de ces expériences, la mise en relation des écritures symboliques permet d’exprimer cette équivalence.

Il est possible d’utiliser des exercices utilisant des supports comme les petits tableaux ci-dessous avec des consignes du type : « *Trouve la règle et complète les cases vides* ».

<table><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="2">15</td></tr></table>

<table><tr><td>5</td><td>17</td></tr><tr><td colspan="2">22</td></tr></table>

<table><tr><td>23</td><td>18</td></tr><tr><td colspan="2">41</td></tr></table>

<table><tr><td>12</td><td>26</td></tr><tr><td colspan="2"></td></tr></table>

<table><tr><td>14</td><td></td></tr><tr><td colspan="2">23</td></tr></table>

<table><tr><td></td><td>25</td></tr><tr><td colspan="2">42</td></tr></table>

Ils peuvent être prolongés par un travail sur les écritures, comme par exemple : « *Pour chaque tableau, trouver toutes écritures additives ou soustractives avec les trois nombres »*

10+5 =15 5+17=22 etc.
5+10=15 22 - 5=17
15-5=10 22 – 17=5
15-10=5

La demande de formulations orales qualifiant le nombre à chercher dans chaque tableau aide aussi les élèves à relier entre elles différentes significations. Par exemple pour le cinquième tableau :

- quel est le nombre qui, ajouté à 14, donne 23 ?
- quel est le complément de 14 à 23 ?
- quel est le nombre différence de 23 et 14 ?
- quel est l’écart de 14 et de 23 ?

Des exercices systématiques de ce type ne peuvent suffire **seuls** ni à faire comprendre, ni à rendre fonctionnelle l’équivalence étudiée. Mais associés aux deux autres types d’expériences, ils contribuent à la construction et à la consolidation de cette équivalence.

Cependant, tous les élèves ne construisent pas cette équivalence au même moment et il faut admettre que, même après avoir été confrontés à ces types d’expériences, certains continuent à recourir à des *solutions personnelles* pour résoudre certains problèmes alors que d’autres pensent à utiliser directement la *solution experte*.

Conclusion

L’idée de *solution personnelle* permet d’envisager que chaque élève, progressivement, gagne en autonomie dans la résolution de problème.

Elle permet aux élèves de prendre conscience qu’ils sont capables de résoudre des problèmes inédits, qu’ils n’ont pas encore rencontrés et pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée. Les solutions peuvent être « inventées ».[3]

Elle incite aussi à accepter et valoriser la différence. Un problème peut être reconnu comme « problème d’application » par certains alors que d’autres ne parviennent pas à le situer dans une catégorie déjà rencontrée. Ils savent qu’ils peuvent le résoudre comme un problème nouveau, en élaborant une solution de façon originale : ils ne sont alors pas démunis.

La mise en œuvre de cette idée, en classe, suppose, entre autres, que l’on renonce à exiger une forme de présentation stéréotypée de la solution du type :

Solution	Opération

Une présentation plus ouverte peut être envisagée, par exemple :

Recherche	Conclusion

Pour certains problèmes, l’enseignant doit aider les élèves à s’approprier un *mode de résolution expert.* Cela ne résulte pas d’un apprentissage spontané : des activités, organisées en progression, doivent être proposées aux élèves par l’enseignant.

[3] Voir à ce sujet le texte « Des problèmes pour chercher » auquel il a déjà été fait référence.