MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

RÉGION ACADÉMIQUE GUADELOUPE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Amériques-Antilles-Guyane

Mercredi 20 mars de 8 h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.
Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.
La première partie est constituée des exercices académiques.
À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue.
La seconde partie, constituée des exercices nationaux, débute après cette pause.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Chaque partie de l'épreuve contient trois exercices. Pour chacune des parties :

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

Chaque équipe rend une seule copie

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10h00.
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Les énoncés doivent être rendus avec les copies

Exercice académique n° 1 : L-système et courbe de Hilbert

(À traiter par tous les candidats)

Un L-système (ou système de Lindenmayer) est un système de réécriture permettant de générer des chaînes de caractères à partir de règles.
La courbe de Hilbert est une courbe continue remplissant un carré. Elle a été décrite pour la première fois par le mathématicien allemand David Hilbert en 1891.

Dans cet exercice, un mot désigne toute suite de lettres formée des lettres A ; B ; D ; F et G.
Par exemple : AGFDAD ; A et ABBDG sont des mots.

Partie A

Un programme informatique fonctionne de la manière suivante : on entre un mot et, après une exécution du programme,

- chaque lettre A du mot (s'il y en a) est remplacée par le mot ABF .
- chaque lettre B du mot (s'il y en a) est remplacée par le mot BAG.

Ce qui donne un nouveau mot.

Par exemple :

- si l'utilisateur rentre le mot AGFB, après une première exécution du programme, on obtient le mot **ABF**GF**BAG**.
- Une deuxième exécution du programme appliquée au nouveau mot permet d'aboutir au mot : **ABFBAG**FGF**BAGABF**G.
- et ainsi de suite...

On entre le mot A.

1. Quel mot obtient-on après 1 exécution ? 2 exécutions ? 3 exécutions ?
2. Combien de lettres A obtient-on après 1 exécution ? 2 exécutions ? 3 exécutions ? 10 exécutions ?
3. Quel est le nombre minimum d'exécutions nécessaires pour obtenir un mot contenant au moins un million de lettres A ?

Partie B

Un second programme informatique fonctionne de la manière suivante : on entre un mot et, après une exécution du programme,

- chaque lettre A du mot (s'il y en a) est remplacée par le mot GBFDAFADFBG
- chaque lettre B du mot (s'il y en a) est remplacée par le mot DAFGBFBGFAD.

Ce qui donne un nouveau mot.

Par exemple, si l'utilisateur rentre le mot AGFB, après une première exécution du programme, on obtient le mot **GBFDAFADFBG**GF**DAFGBFBGFAD**.

Une deuxième exécution du programme est ensuite appliquée au nouveau mot, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on fait une exécution ?

2. On entre le mot A.

a. Quel mot obtient-on après deux exécutions ?

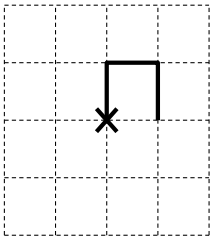
b. Combien de lettres *A* obtient-on après une exécution ? deux exécutions ? trois exécutions ?

c. Quel est le nombre minimum d'exécutions nécessaires pour obtenir un mot contenant au moins un million de lettres *A*?

d. Après 10 exécutions, combien de lettres *F* contient le mot obtenu ?

3. On souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillée, en utilisant le dernier mot obtenu par le programme. Pour cela, on lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et on trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :

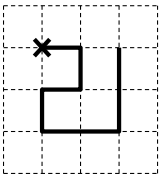
- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est *F*, on trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est *G*, on tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est *D*, on tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est *A* ou *B*, on ne fait rien ;
- quand toutes les lettres sont lues, on remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.



Par exemple, le motif obtenu à partir du mot GBFDFADFBG est représenté ci-contre :

a. On entre le mot A et on exécute deux fois le programme. Dessiner le motif obtenu.

b. Donner un mot correspondant au motif ci-dessous.



c. Quel est le mot ayant le minimum de lettres correspondant au motif précédent?

4. On appelle longueur du motif le nombre de segments tracés sur le motif. Par exemple, la longueur du motif de la question précédente est 8.

On entre le mot A.

a. Quel est la longueur du motif obtenu après 2 exécutions du programme?

b. Quel est la longueur du motif obtenu après 10 exécutions du programme?

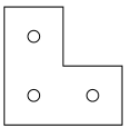
c. Quel est le nombre minimum d'exécutions nécessaires pour obtenir un motif de longueur supérieure ou égale à 1000 ?

Exercice académique n°2 : Nombres triangulaires

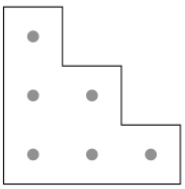
(*À traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques*)

Dans tout ce problème, pour tout entier naturel non nul, on note $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

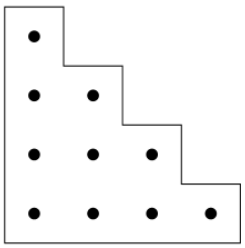
Le nombre T_n est appelé $n - ième$ nombre triangulaire car il dénombre les points placés dans une disposition triangulaire à n étages comme illustré ci-dessous :



$T_2 = 3$



$T_3 = 6$



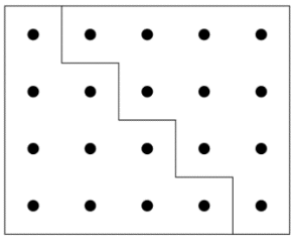
$T_4 = 10$

1. Établir une relation entre T_n et T_{n-1} , pour n entier supérieur ou égal à 2, puis, recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	3	6	10						

2. En observant la figure ci-contre, expliquez pourquoi on peut conjecturer que :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}; \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

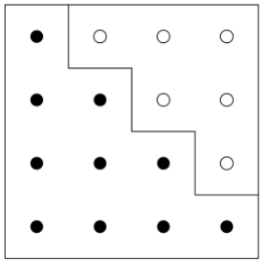


Dans la suite de l'exercice, on admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :

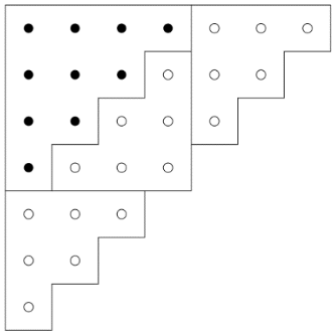
$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. En déduire une expression de la somme des n premiers nombres pairs non nuls.

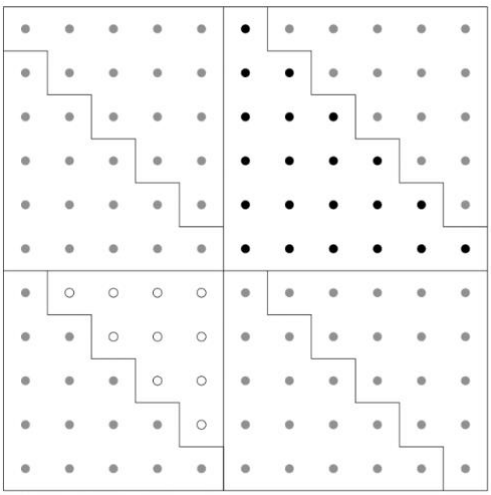
4. A partir de la figure ci-contre, pour n entier supérieur ou égal à 2, conjecturer une expression de $T_n + T_{n-1}$, puis la démontrer.



5. A partir de la figure ci-contre, pour n entier supérieur ou égal à 2, conjecturer une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{2n-1} , puis la démontrer.



6. A partir de la figure ci-contre, pour n entier supérieur ou égal à 2, conjecturer une relation entre T_{n-1}, T_n et T_{n+1} , puis la démontrer.



7. Somme des carrés de nombres triangulaires consécutifs

a. Vérifier que $T_1^2 + T_2^2$ et $T_2^2 + T_3^2$ sont des nombres triangulaires.

b. Montrer que la somme des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est un nombre triangulaire. Autrement dit, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, il existe un entier naturel m non nul tel que $T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_m$.

8. Montrer que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, $T_n T_k + T_{n-1} T_{k-1}$ est un nombre triangulaire.

9. Montrer que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, $n^2 T_{k-1} + k T_{n-1}$ est un nombre triangulaire.

10. Somme des *n* premiers nombres triangulaires

a. Pour n entier non nul, conjecturer une expression de $3(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$ en fonction de T_n. Expliquer la démarche.

b. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Démontrer la conjecture émise à la question 10.a.

Exercice académique n°3 : La Grenouille

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

Une grenouille Alpha se déplace vers la droite, en faisant des sauts, sur un axe horizontal d'origine O, sur des points à abscisses entières. Au début, elle se trouve au point O d'abscisse 0.

Elle saute en faisant des sauts soit de a unités, soit de b unités ou soit de c unités, a; b et c étant des entiers naturels non nuls, avec $a < b < c$.

- La probabilité qu'elle fasse un saut de $\boldsymbol{a}$ unités est de $\frac{1}{6}$,
- La probabilité qu'elle fasse un saut de $\boldsymbol{b}$ unités est égale à $\frac{1}{2}$.
- Soit n un entier naturel non nul, on note u_n l'abscisse du point où se trouve la grenouille Alpha après n sauts.

1. Calculer la probabilité que la grenouille Alpha fasse un saut de c unités.

2. On suppose dans toute cette question, que $a = 2$; $b = 3$ et $c = 4$

a) Quelles peuvent être les différentes valeurs possibles pour u_2 ?

b) Dans quels cas aura-t-on $u_3 = 11$?

c) Déterminer la probabilité que $u_3 = 11$.

d) Déterminer la plus grande valeur possible pour u_3. Déterminer la probabilité d'obtenir cette plus grande valeur de u_3 .

On revient au cas général.

3. Dans cette question, la grenouille Alpha fait 3 sauts différents

a) On suppose que $u_3 = 6$. Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

On rappelle qu'une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

b) Sachant que a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique non constante, déterminer toutes les valeurs possibles de a, b et c pour que $u_3 = 21$.

On rappelle qu'une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

c) Dans cette question, a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique non constante. Déterminer a, b et c pour que $u_3 = 26$.

4. Une deuxième grenouille Béta part du point d'abscisse 25, fait des sauts vers la gauche en se déplaçant pour chaque saut de 2 unités. Pour tout entier naturel n non nul, on note v_n l'abscisse du point où se trouve la grenouille Béta après n sauts.

La grenouille Alpha décide alors de ne faire que des sauts de 3 unités, vers la droite, en partant toujours du point d'abscisse 0. Les deux grenouilles font leurs sauts en même temps.

a) Déterminer v_7

b) Ces deux grenouilles vont elles se retrouver au même point ? Si oui, après combien de sauts ?

5. Une troisième grenouille Gamma part du point d'abscisse 64 et se déplace vers la gauche, en faisant des sauts de 2 unités. Pour tout entier naturel n non nul, on note t_n l'abscisse du point où se trouve la grenouille Gamma après n sauts.

La grenouille Alpha décide alors, toujours en partant du point d'abscisse zéro et en allant vers la droite, d'alterner des sauts de 1 unité et de 3 unités, en commençant par un saut d'une unité.

Les deux grenouilles font leurs sauts en même temps.

a) Déterminer u_7 .

b) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer u_{2n} et u_{2n+1}.

c) Les deux grenouilles Alpha et Gamma vont elles se retrouver au même point ?