MÉTHODE D'EULER

Logiciel utilisé : **Géogébra** version avec tableur

Pré-requis (voir cours):

Soit f une fonction dérivable en un point a d'un intervalle I , la formule d'approximation de la fonction f autour de a est donnée par : $f(a+h) \approx f(a)+h\times f'(a)$.

La méthode d'Euler consiste à calculer de proche en proche, des valeurs approchées de la fonction f sur l'intervalle I, sans connaitre explicitement l'expression de $f(x)$ puis à construire une courbe approchée représentant f sur l'intervalle I.

On doit tout de même disposer d'un certain nombre d'informations sur cette fonction. Par exemple :

-Connaitre sa dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle I et la valeur de $f(a)$

OU

-Connaitre une égalité reliant f et f' (une équation différentielle vérifiée par f)

Dans tous les cas on construit une suite de points M_n approchant la courbe représentative de la fonction f.

Premier exemple :

On cherche à construire de façon approchée la courbe représentative de la fonction f définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f'(x) & =2x \quad \forall x\in\mathbb{R} \\ f(0) & =0 \end{cases}$$

On admettra l'existence et l'unicité d' une telle fonction f.

On est donc dans le premier cas où on connait la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur prise par f en un point (ici $a=0$ et $f(0)=0$)

On commence par se fixer un réel h assez petit (par exemple $h=0,1$) afin d'appliquer la formule d'approximation (rappelée plus haut) autour de $a=0$.

On obtient :

$\star$Le premier point $M_0\begin{pmatrix} x_0=0 \\ y_0=f(0)=0 \end{pmatrix}$ donc $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\star$ Le point suivant : $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ avec $x_1=x_0+h=0+h=h$. Pour obtenir y_1, on utilise une approximation de $f(x_1)$ par : $f(x_1)=f(x_0+h)$

or, d'après la formule d'approximation rappelée plus haut, $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\times f'(x_0)=y_0+h\times f'(x_0)$.

Mais puisque nous connaissons $x_0=0$, $y_0=0$ et $f'(x_0)=2x_0$, nous obtenons :

$f(0+h)\approx 0+h\times 2x_0=0$. Il s'ensuit que : $M_1\begin{pmatrix} x_1=h \\ y_1=0 \end{pmatrix}$

$\star$Le point suivant : $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avec $x_2 = x_1 + h = h + h = 2h$

Pour obtenir y_2, on utilise comme précédemment, une approximation de $f(x_2)$ par : $f(x_2) = f(x_1 + h)$
d'après la même formule d'approximation , $f(x_1 + h) \approx f(x_1) + h \times f'(x_1) \approx y_1 + h \times f'(x_1)$.
Connaissant $x_1 = h$, $y_1 = 0$ et $f'(x_1) = 2x_1 = 2h$, nous obtenons :
$y_2 = 0 + h \times 2h = 2h^2$
D'où le point $M_2\begin{pmatrix} x_2 = 2h \\ y_2 = 2h^2 \end{pmatrix}$

En continuant le processus, nous obtenons une suite de points $M_n\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient les relations de récurrence :
$x_{n+1} = x_n + h$
$y_{n+1} = y_n + h \times f'(x_n) = y_n + h \times 2x_n$.
Il est facile de programmer ces suites sur un tableur et de visualiser les points M_n dans un repère du plan et ainsi obtenir une courbe approchée de la fonction f.
Nous utiliserons le tableur de Géogébra pour ce faire.
Dans la cellule A1, nous introduirons la valeur de h (pour commencer on prendra h=0,5) : Taper 0.5 dans $\boxed{\textbf{A1}}$.
Dans la cellule $\boxed{\textbf{A2}}$ on met la valeur de $x_0 = 0$
Dans la cellule $\boxed{\textbf{A3}}$ on met la relation de récurrence définissant x_n . On tape donc la formule :
$\boxed{= \textbf{A2} + \$\textbf{A}\$\textbf{1}}$ puis on recopie cette formule vers le bas (jusqu'à la ligne 102 par exemple)
Nous avons dans la colonne **A**, à partir de $\boxed{\textbf{A2}}$, la liste des abscisses x_n des points M_n.

Pour les termes de la suite y_n, nous utiliserons la colonne **B**
Dans la cellule $\boxed{\textbf{B2}}$ on met la valeur de $y_0 = 0$
Dans la cellule $\boxed{\textbf{B3}}$ on met la relation de récurrence définissant y_n . On tape donc la formule :
$\boxed{= \textbf{B2} + \$\textbf{A}\$\textbf{1} * \textbf{2} * \textbf{A2}}$ puis on recopie cette formule vers le bas (jusqu'à la ligne 102 par exemple)
Nous avons dans la colonne **B**, à partir de $\boxed{\textbf{B2}}$, la liste des ordonnées y_n des points M_n.

Pour avoir les points d'abscisses négatives, nous utiliserons la colonne **C** et les ordonnées de ces points seront placées dans la colonne **D**.
Dans la cellule $\boxed{\textbf{C2}}$ on met la valeur de $x_0 = 0$
Dans la cellule $\boxed{\textbf{C3}}$ on met la relation de récurrence définissant x_n avec h négatif. On tape donc la formule :
$\boxed{= \textbf{C2} - \$\textbf{A}\$\textbf{1}}$ puis on recopie cette formule vers le bas (jusqu'à la ligne 102 par exemple)
Dans la cellule $\boxed{\textbf{D2}}$ on met la valeur de $y_0 = 0$
Dans la cellule $\boxed{\textbf{D3}}$ on met la relation de récurrence définissant y_n . On tape donc la formule :
$\boxed{= \textbf{D2} - \$\textbf{A}\$\textbf{1} * \textbf{2} * \textbf{C2}}$ puis on recopie cette formule vers le bas (jusqu'à la ligne 102 par exemple)

Pour créer les points d'abscisses positives, on procède comme suit :
On sélectionne les colonnes $\boxed{\textbf{A}}$ et $\boxed{\textbf{B}}$ à partir de $\boxed{\textbf{A2}}$ et $\boxed{\textbf{B2}}$
On fait un clic- droit dans la zone sélectionnée et dans le menu déroulant on choisit :
" Créer une liste de points ".
On procède de façon analogue pour les points d'abscisses négatives.
Pour plus de lisibilité, on demande de ne pas afficher l'étiquette en procédant comme suit :
Dans la fenêtre d'algèbre, on fait un clic-droit sur liste1 puis dans le menu déroulant on choisit propriétés, puis points et on décoche l'affichage de l'étiquette. On peut aussi choisir dans ce menu options , la taille des points , la couleur etc...
On peut relier les points consécutifs par des segments mais la syntaxe est un peu compliquée :
Dans la barre de saisie, on tape la formule :(attention à la syntaxe)
liste3 = **Séquence**[**Segment**[**Elément**[**liste1**, **i**], **Elément**[**liste1**, **i** + **1**]], **i**, **1**, **Longueur**[**liste1**] − **1**] puis on valide.
Ensuite pour les points d'abscisses négatives, on tape dans la barre de saisie :
liste4 = **Séquence**[**Segment**[**Elément**[**liste2**, **i**], **Elément**[**liste2**, **i** + **1**]], **i**, **1**, **Longueur**[**liste2**] − **1**] puis on valide.
ATTENTION aux accents, aux majuscules, aux virgules. Il n'y a que des crochets et Il n'y a aucun espace.
Normalement, si tout s'est bien passé, vous devriez observer une ligne polygonale donnant une représentation approchée de la fonction f vérifiant les contraintes de départ.
Pour avoir une représentation plus précise, on peut diminuer le pas de la méthode h en tapant la valeur désirée dans la cellule $\boxed{\textbf{A1}}$.
Observer le tracé lorsque $h = 0,2$, $h = 0,1$, $h = 0,05$ etc...
Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression de $f(x)$? Justifier votre conjecture.
Ceci prouve l'existence de la fonction f admise au début de l'activité.

Deuxième exemple :(la fonction exponentielle)

On applique la méthode précédente à la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
On admet l'existence et l'unicité d'une telle fonction

1. Adapter la méthode d'Euler à cette situation et montrer que l'on obtient une suite de points $M_n\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient les relations de récurrence :
   $x_{n+1} = x_n + h$
   $y_{n+1} = y_n + h \times y_n$.

2. Représenter graphiquement, à l'aide d'un tableur, la suite de points ainsi obtenue pour plusieurs valeurs du pas h.

3. Quelles propriétés de la fonction f pouvez-vous conjecturer ?

L'étude complète de cette fonction sera faite en cours, c'est la fonction exponentielle.