Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Le statut et l'usage des nombres évoluent au cours de la scolarité. Au cours du cycle 3, les nombres positifs (entiers, décimaux ou rationnels) ont été principalement utilisés pour :

- compter des objets ;
- mesurer des grandeurs ;
- graduer une demi-droite ;
- jouer le rôle d'opérateur (par exemple prendre le quart de, ou calculer 75 % de) ;
- effectuer des calculs et en donner les résultats sous forme exacte ou approchée.

L'élève a effectué sur ces nombres des opérations dont il a perçu implicitement certaines propriétés (associativité, commutativité, élément neutre, distributivité).

Objectifs

L'introduction au cycle 4 des nombres décimaux relatifs vise plusieurs objectifs :

- étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui des décimaux positifs et négatifs), dans lequel toutes les soustractions sont possibles. Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs (principe de permanence) ;
- accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « au-dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes, etc.) ;
- disposer de ces nouveaux outils pour modéliser et résoudre des problèmes de la vie courante ;
- étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension des nombres négatifs en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons, la perception de l'extension de l'ensemble des décimaux positifs à celui des décimaux relatifs, la compréhension de l'écriture des nombres négatifs et de leur représentation sur la droite graduée contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

L'utilisation des nombres relatifs pour modéliser des grandeurs physiques (température, profondeur, altitude) ou sociales (dates, gains et pertes) susceptibles de prendre des valeurs en dessous de zéro contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4) ainsi qu'aux représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

PROGRESSIVITÉ DES APPRENTISSAGES

Anticipation

Quel que soit le procédé retenu pour l'introduction des nombres négatifs, celle-ci gagne à être préparée en amont par une réactivation des propriétés des opérations sur les nombres décimaux positifs et de la notion de différence, qui ont été étudiées au cycle 3.

De nombreux exemples de calcul mental permettront dans un premier temps de simplifier des programmes de calcul du type « ajouter b puis soustraire a » en « ajouter $b-a$ »lorsque $b > a$ puis, dans un deuxième temps d'aborder la même question lorsque $b < a$.

De nombreux exemples de ce type sont présentés dans le document « Les nombres relatifs en 5e », Parcours d'Étude et de Recherche du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.

Un exemple d'introduction des nombres négatifs dans un cadre mathématique

Une introduction des nombres négatifs (d'abord entiers puis décimaux non entiers) sans référence à des contextes concrets peut se faire à partir de l'équivalence de programmes de calcul.

L'équivalence des programmes de calcul « ajouter 3 puis soustraire 5 », « ajouter 2 puis soustraire 4 », « ajouter 1 puis soustraire $+3$ », « ajouter 0 puis soustraire 2 » permet d'écrire : $3-5=2-4=1-3=0-2$. On convient alors de coder par (-2) le résultat commun à toutes ces soustractions (et à beaucoup d'autres encore…).

En début d'apprentissage, l'utilisation de parenthèses englobant à la fois le signe « moins » et la valeur absolue permet d'éviter la confusion du signe « moins » intervenant dans le codage d'un nombre négatif avec le signe opératoire de la soustraction.

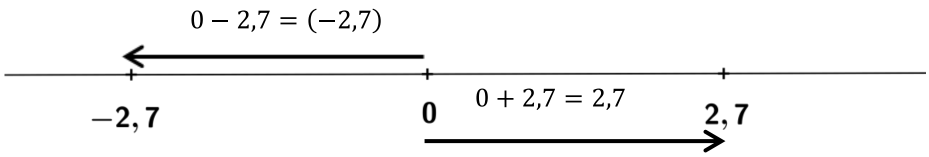
Pour bien faire comprendre le plongement de l'ensemble des décimaux positifs dans celui des décimaux relatifs et le fait que seuls les nombres négatifs sont nouveaux dans la construction, on évitera les écritures du type $(+3)$ pour coder les décimaux positifs déjà connus. Cela permet de garder au signe $+$ son seul statut opératoire et d'éviter des exercices de simplification d'écriture au terme desquels les élèves ne savent plus reconnaître que $(+2)\ +\ (+3)$, c'est tout simplement $2\ +\ 3$.

Les élèves pourront ensuite être entraînés à résoudre des additions à trous (reformulées en : « quel nombre faut-il ajouter à … pour obtenir … ? ») mettant en jeu d'abord des nombres entiers, puis des nombres décimaux non entiers. Les nombres négatifs apparaissent alors comme des outils permettant de résoudre des équations à trou du type $b+\cdots=a$ lorsque $0\leq a<b$, ce qui revient à rendre possibles des soustractions du type $a-b$ avec $0<a<b$, a et b étant des décimaux.

Le repérage des nombres relatifs

Le lien peut ensuite être fait avec le repérage sur la droite graduée. La référence au placement des nombres négatifs sur la droite graduée peut être basée sur un modèle concret (par exemple celui des températures) ou sur l'interprétation de la soustraction d'un décimal positif comme un déplacement vers la gauche.

Ainsi le nombre $(-2{,}7) = 0 - 2{,}7$ repère le point situé à la distance $2{,}7$ de l'origine, symétriquement par rapport à l'origine au point repéré par le nombre $2{,}7$. Il est défini comme étant son opposé.
Le nombre positif $2{,}7$ est désigné comme étant la valeur absolue du nombre négatif $(-2{,}7)$.



La définition de l'opposé d'un nombre permet de compléter le corpus d'égalités à trous par des égalités du type $7{,}1 + \cdots = 0$ ou $(-7{,}1) + \cdots\ =\ 0$.

Pour éviter les confusions, on peut convenir, en début d'apprentissage, de noter op $(7{,}1)$ l'opposé du nombre $7{,}1$.

Cette notation sera, un peu plus tard, remplacée d'abord par la notation $(-7{,}1)$, puis par $-7{,}1$ sans négliger d'aborder avec les élèves les différentes significations que prend alors le signe « moins » :

- marqueur d'un nombre négatif dans $(-7{,}1)$;
- signe de soustraction dans $0 -\ 7{,}1$ ou dans $20 - 27{,}1$;
- marqueur de l'opposé, par exemple dans l'écriture $-(-7{,}1)$.

Le repérage des décimaux relatifs sur la droite graduée est un bon point d'appui pour aborder la question de leur classement. Un travail systématique de changement de registre (de l'écriture du nombre à sa représentation sur la droite et vice versa) permet de construire l'image mentale de l'opposé, d'éviter les erreurs de classement et facilitera l'introduction ultérieure du repérage dans le plan.

Si le classement des nombres relatifs ne pose pas de difficulté particulière lorsqu'ils sont exprimés sous forme chiffrée, la difficulté apparaît lorsqu'ils sont désignés sous forme littérale, les élèves ayant du mal à concevoir que $-a$ puisse, sous certaines conditions, désigner un nombre positif.

Les opérations

L'addition et la soustraction sont introduites dès le début de cycle 4 ; il est nécessaire d'entretenir leur assimilation tout au long du cycle, tant par des exercices d'entraînement technique (calcul mental ou écrit) que par la résolution de problèmes les mettant en jeu. La multiplication est abordée une fois que ces deux opérations sont bien en place, et après avoir réactivé la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le cadre des nombres positifs. Il est nécessaire que le sens et les propriétés de la multiplication soient bien stabilisés avant d'aborder la division.

L'addition et la soustraction

Beaucoup de situations en lien avec la vie courante peuvent illustrer l'addition de deux nombres relatifs. Celle-ci permet en effet de modéliser soit le bilan de deux variations (gains et pertes, montées et descentes d'un ascenseur, déplacements vers la droite ou vers la gauche le long de la droite graduée), soit l'application d'une variation (augmentation, diminution) à un état (température, altitude, solde d'un compte financier, score d'un joueur). La variété des contextes utilisés évitera que la prégnance d'un modèle empêche la construction du statut de nombre.

Une pratique routinière, notamment sous forme de calcul mental, d'additions entre nombres relatifs permettra l'automatisation progressive de la règle d'addition, sans qu'il soit nécessaire de la formaliser. L'élève pourra alors s'affranchir du recours à un modèle concret ou à la droite graduée.

L'introduction de la soustraction suppose que soient bien installées l'addition et la notion d'opposé, $a - b$ étant défini comme égal à $a + \mathrm{op}(b)$. Il est alors possible d'interpréter le résultat d'une addition à trou comme la différence de deux nombres relatifs.

La simplification des calculs

L'élève dispose alors de tous les éléments permettant de justifier la simplification de calculs enchaînant des additions et des soustractions sur des nombres relatifs, du type $2 + (-5) + 4$. La simplification des expressions repose sur la définition de la soustraction dans D, puisque, sur l'exemple précédent, $2 + (-5) = 2 - 5$. Dans les expressions simplifiées, les seuls signes restants sont des signes d'opérations (additions et soustractions), sauf dans le cas où le premier terme de la somme est un nombre négatif comme dans $(-2) + 3 - 5$. Progressivement, l'élève dégage des méthodes efficaces pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, notamment la neutralisation des opposés et le regroupement des nombres de même signe.

Beaucoup de situations concrètes se prêtent à ce type de calculs : moyennes de températures, mouvements dans les deux sens, bilans financiers de gains et de pertes, scores de jeu.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu et le nombre d'opérations à enchaîner constituent des éléments de différenciation.

La multiplication

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = \big((-2) + 2\big) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Si la métaphore des amis et des ennemis est une aide à la mémorisation de la règle des signes, il importe d'insister sur le fait qu'elle n'en constitue en aucune manière une justification.

Une pratique routinière (mentale et écrite) de multiplications sur les nombres relatifs permet de découvrir, puis d'utiliser, des propriétés mathématiques essentielles comme l'effet de la multiplication par (-1), le signe d'un produit de plusieurs facteurs, l'associativité de la multiplication, etc.

Enfin, on veillera à ne pas se limiter trop longtemps à des multiplications entre entiers relatifs car cela risquerait de renforcer l'obstacle dû à la seule conception de la multiplication comme addition itérée.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu est encore un élément de différenciation

La division

Le quotient de deux nombres relatifs est introduit à partir d'exemples de multiplications à trous et du prolongement de la définition du quotient de a par b (le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir$a$), dans une démarche similaire à celle utilisée pour l'introduction de la soustraction.

La règle des signes pour un quotient est démontrée à partir de celle qui régit le signe d'un produit.

À ce stade, on distingue $\frac{-4}{3}$, solution de la multiplication à trous $3 \times \ldots = -4$ et $\frac{4}{-3}$, solution de l'équation à trous $(-3) \times \ldots = 4$.

En admettant que $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{(-3)\times(-4)}{3}$ (extension de la propriété connue du produit d'un entier positif par une fraction), il vient $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{12}{3} = 4$; donc le nombre par lequel on multiplie (-3) pour obtenir 4 est à la fois $\frac{4}{-3}$ et $\frac{-4}{3}$, donc $\frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$

Enfin, en étendant la règle d'addition de deux fractions de même dénominateur, il vient

$$\frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{(-4+4)}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Ce qui permet de justifier que $\frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

L'acquisition de ces notions délicates se fera dans la durée, et permettra d'aborder la distinction entre opposé et inverse.

Les nombres rationnels négatifs

En cours de cycle, et parallèlement à la consolidation du calcul fractionnaire, les propriétés des opérations entre décimaux relatifs seront étendues, toujours selon le principe de permanence, aux nombres rationnels, positifs ou négatifs.

Stratégies d'enseignement

L'histoire nous apprend qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement en tant que nombres. Utilisés pour des besoins comptables (créances, dettes), ils ont longtemps servi en mathématiques comme outils de calcul, voire comme intermédiaires de calcul dans la résolution d'équations. Il a fallu attendre les mathématiques modernes et la théorie des structures pour les définir comme des classes d'équivalence de couples d'entiers naturels. La transposition didactique de cette notion est délicate et explique les difficultés à appréhender en tant que nombres des objets définis « en-dessous de 0 », alors même qu'ils sont utilisés dans la vie courante où l'on parle aussi bien d'une température de -7 °C ou d'une profondeur de -35 m que d'un bilan financier de -400 €.
Des grandeurs comme la température, la date ou l'altitude peuvent être ordonnées et comparées ; ce sont des grandeurs dites « repérables » ; elles peuvent servir de modèles pour introduire, comparer et ordonner des nombres relatifs. En revanche, quand on mélange 100 g d'eau à la température de 50 °C et 100 g d'eau à la température de 10 °C, on obtient 200 g d'eau dont la température n'est pas 60 °C (mais plutôt de l'ordre de 30 °C). On dit que la température est une grandeur non mesurable.
L'interprétation de l'addition des relatifs dans des contextes concrets de grandeurs repérables mais non mesurables (température, altitude, date) nécessite d'attribuer aux deux nombres en jeu des significations différentes. Ainsi, si on souhaite s'appuyer sur le contexte des températures pour introduire ou interpréter l'égalité $3 + (-4) = (-1)$, on peut, par exemple, attribuer aux nombres 3 et (-1) un statut d'état (température initiale de 3 °C et température finale de -1 °C, alors que le nombre (-4) a le statut d'une variation (diminution de 4 °C).

S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle « gain-perte », ou le modèle « montée-descente » peuvent constituer un réel obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous deux négatifs.

Les références à l'environnement familier des élèves et leur place dans la progression des apprentissages méritent donc d'être interrogées. Le professeur doit être conscient qu'une approche concrète, en référence à des grandeurs, peut engendrer des obstacles à plus ou moins long terme, notamment parce qu'il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication. Par ailleurs, il faut savoir que certains élèves éprouvent des difficultés à s'affranchir du contexte d'introduction des nombres. Ceux-ci imposent en effet une image mentale dont il peut être difficile de se départir, empêchant *in fine* d'attribuer aux négatifs leur statut de nombre. Il importe donc de ne pas recourir à un unique modèle, par exemple celui des températures. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques.

Aucun mode d'introduction des nombres négatifs ne peut, à lui seul, permettre l'atteinte de tous les objectifs visés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir (par exemple les différents statuts du signe « moins »). Il importe toutefois que l'élève soit capable, en fin de cycle, d'appréhender un nombre négatif comme élément d'un nouvel ensemble de nombres, structuré par des opérations qui prolongent celles des décimaux positifs.

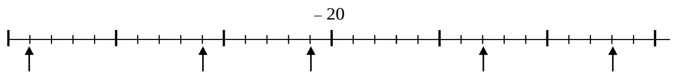
Enfin, l'apprentissage du calcul sur ces nombres ne saurait se confiner à l'application de règles formelles imposées d'emblée à l'élève sans aucune justification.

Différenciation

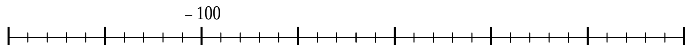
Pour certains élèves, la compréhension des nombres négatifs demande du temps et nécessite le recours à des outils de représentation (contextes concrets, droite graduée) alors que d'autres les utilisent déjà de façon automatisée. Comme cela a déjà dit, ce sont les activités routinières de calcul qui permettent à tous les élèves de s'affranchir progressivement de ces contextes concrets pour appréhender les relatifs comme des nombres. En termes de calcul, la différenciation s'effectue au niveau de l'écriture et de la nature des nombres (entiers, décimaux non entiers, fractions) et du nombre d'étapes. L'utilisation de parenthèses englobant les deux symboles d'écriture d'un nombre négatif et la représentation de l'opposé sous la forme op() peuvent être maintenues plus longtemps pour certains élèves que pour d'autres.

Dans le cadre d'un approfondissement, on peut proposer à certains élèves des activités de repérage pour lesquelles le nombre 0 n'est pas visible sur la partie proposée de la droite graduée, comme dans les deux exemples suivants :

Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à une unité



Sur la droite graduée ci-dessous, une graduation correspond à une unité.
Placer les nombres – 105, – 81 et – 78



Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problème

- repérage de dates, calcul de durées sur une frise chronologique ;
- repérage de distances sur une droite graduée ;
- comparaison de températures, calcul de moyennes de températures ;

- bilans financiers ;
- lecture, interprétation et production de diagrammes et de graphiques faisant intervenir des nombres relatifs ;
- repérage dans le plan et dans l'espace.

Exemples d'activité

- exemples de questions flash

Exemples de tâches intermédiaires :

- le jeu de Jungle math speed
- le labyrinthe
- exemple d'activités avec prise d'initiative : le jeu-concours

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre relatif avec les élèves :

- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Enseigner les nombres relatifs au collège – REPÈRES IREM.n°73 – octobre 2008 (IREM d'Aquitaine)
- Des maths ensemble et pour chacun 5^{e} – Jean-Philippe Rouquès et Hélène Staïner – Sceren CRDP Pays de Loire
- Les nombres relatifs en 5^{e} – proposition de Parcours d'Étude et de Recherche. Groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.