MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

Exemple d'approche thématique

Région académique

Plan Académique de Formation 2019-2020

Thème « Calcul d’aires »

Extrait du BO

- Des calculs d’aires menés selon différentes méthodes permettent **d’aboutir à l’introduction de l’intégrale** d’une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ [...]
- Ce thème est l’occasion de **revoir les aires des figures planes usuelles** : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques [...]
- Les calculs d’aires par **approximations successives** se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre **d’algorithmes** notamment dans le cas d’aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. [...]
- Différentes approches sont possibles :
  - *méthodes historiques d’approximation des aires,*
  - *méthode des rectangles et des trapèzes pour l’aire sous une courbe,*
  - *méthodes probabilistes ,*
  - *bien sûr le calcul intégral.*

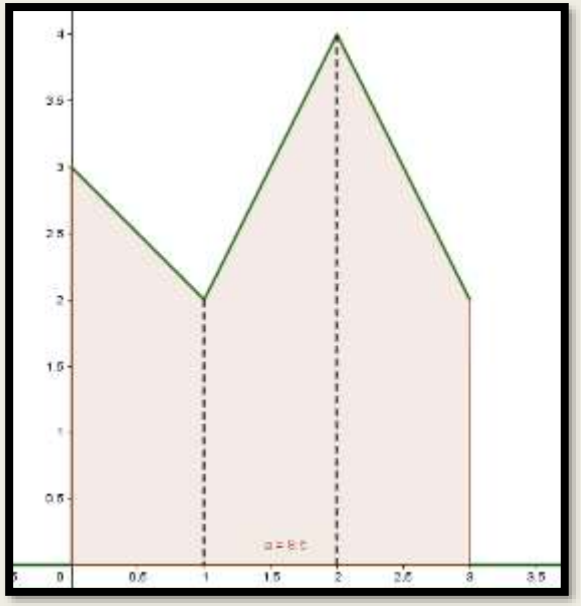
Exemples de développements

Problématique : Calculer l’aire sous la courbe représentative d’une fonction positive.

- Option n°1 :
  - *Géométrie : Aires de polygones*
- Option n°2 :
  - *Analyse : Calcul de primitives*
- Option n°3 :
  - *Analyse numérique : quadratures*
- Option n°4 :
  - *Probabilités : Méthodes de Monte-Carlo*

Option 1 : Géométrie

- **Objet d'étude :** Intégrer des fonctions :
  - *Constantes → Aires de rectangles*
  - *Affines → Aires de trapèzes*
  - *Affines par morceaux → Relation de Chasles*



- **Outils**
  - *A la main*

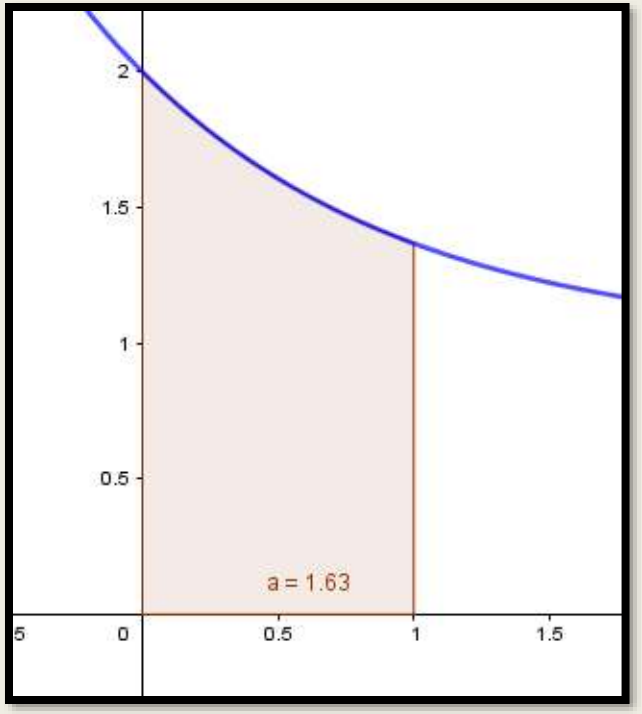
- **Objectifs**
  - *Révisions de géométrie plane*
  - *Aborder le calcul intégral de manière élémentaire*
  - *Préparer les méthodes de quadrature*

Option 2 : Calcul de primitives

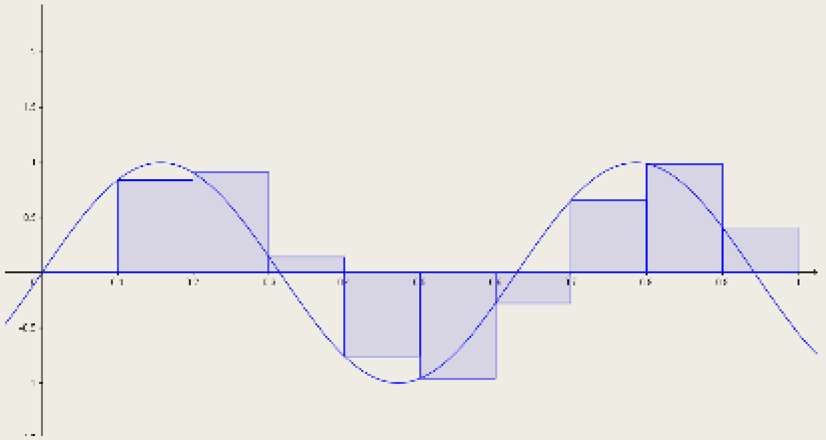
- **Objet d'étude :** fonctions dont des primitives sont connues :
  - *Constantes et affines*
  - *Polynomiales*
  - *Exponentielles*

- **Outils**
  - *A la main*

- **Objectifs**
  - *Intégrer de nouvelles fonctions*
  - *Lien intégrales (géométriques) et primitives (analytiques)*



Option 3 : Quadratures

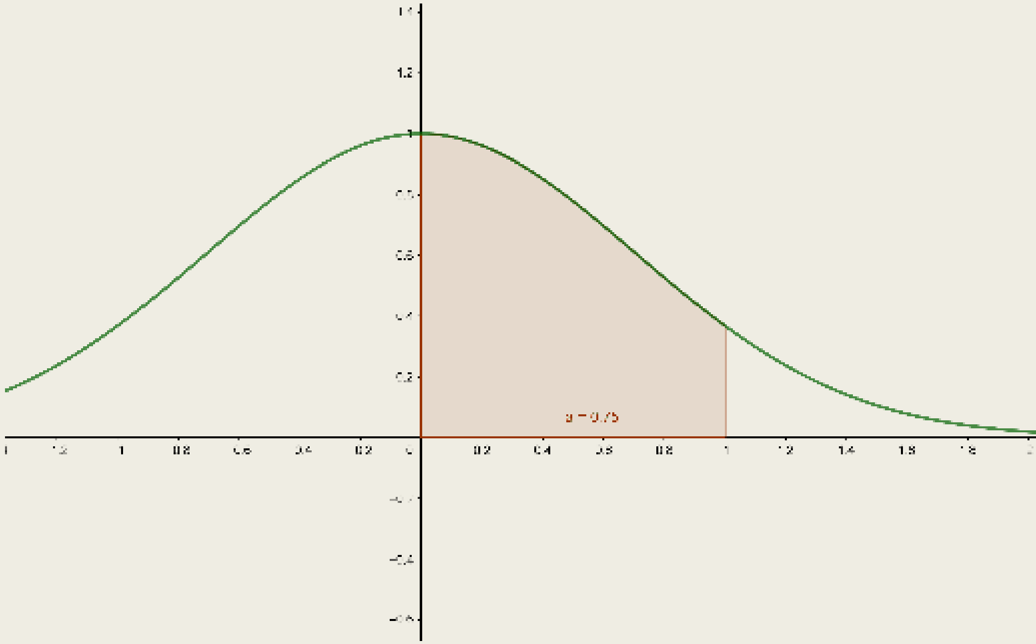


- **Objet d'étude**
  - *Intégrer des fonctions de primitives inconnues*

- **Outils**
  - *Python ou tableur*

- **Objectifs pédagogiques**
  - *Généraliser la notion d'intégrale à d'autres fonctions*
  - *Initier aux méthodes numériques,*
  - *Compétences algorithmiques*

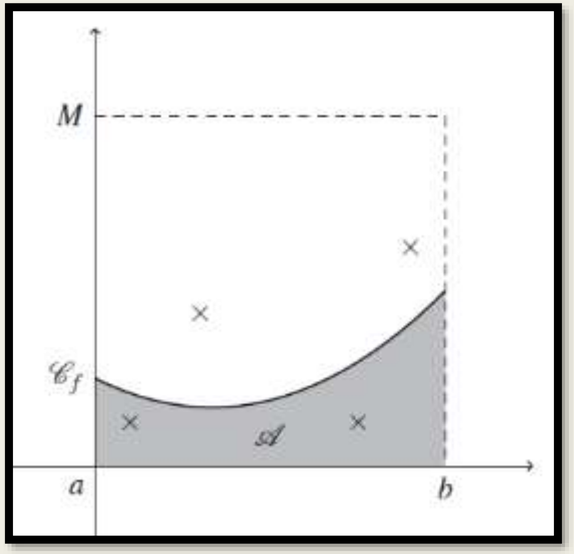
Application à $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$



```python
from math import exp

def rectangles(n,a,b):
    A = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        x = a+i*h
        y = exp(-x**2)
        A = A+h*y
    return A
```

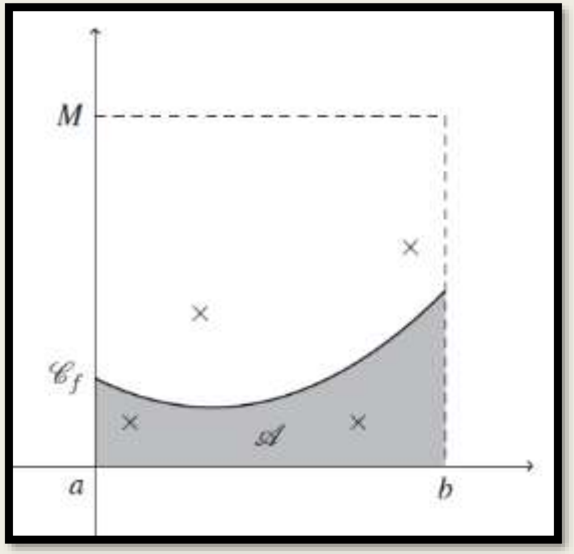
```
In [11]: rectangles(100,0,1)
Out[11]: 0.7499786042621128

In [12]: rectangles(10000,0,1)
Out[12]: 0.7468557382272354
```

Option 4 : Méthode de Monte-Carlo



- **Objet d'étude**
  - *Intégrer des fonctions avec primitives inconnues*
- **Outils**
  - *Python ou tableur*
- **Objectifs pédagogiques**
  - *Mobiliser des outils probabilistes pour un problème déterministe*
  - *Développer des compétences en probabilités*
  - *Simplicité de la méthode*

Monte-Carlo élémentaire



- Soit f continue et positive sur $[a, b]$ et soit M un majorant de f sur $[a, b]$.

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

- On tire au hasard un point dans le pavé $[a, b] \times [0, M]$

  La probabilité de tomber sous la courbe de f est

$$\boldsymbol{p = \frac{I}{M(b-a)}}$$

- Si on tire un grand nombre de points, la fréquence de points sous la courbe est

$$f_n \approx p$$

et donc

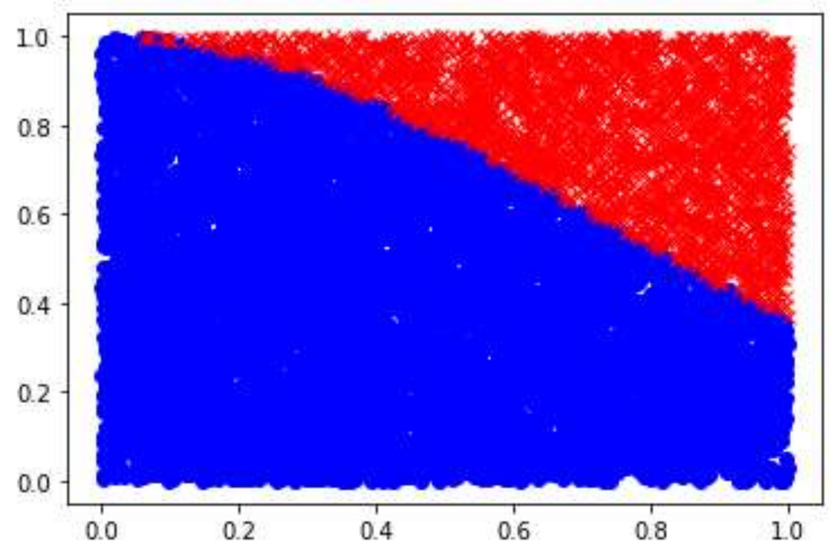
$$\boldsymbol{I \approx M(b-a)f_n}$$

Application à $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $e^{-x^2} \leq 1 = M$

```python
from math import exp
from random import random

def MCInt(n,a,b,M):
    S = 0
    for i in range(n):
        x = a+(b-a)*random()
        y = M*random()
        if (y<exp(-x**2)):
            S=S+1
    f = S/n
    I=(b-a)*M*f
    return I
```

```
In [2]: MCInt(10000,0,1,1)
Out[2]: 0.7471

In [3]: MCInt(1000000,0,1,1)
Out[3]: 0.747564
```



Option 4^{bis}: Monte-Carlo classique

- On part de **l'égalité de la moyenne :**

$$\boldsymbol{I = \int_a^b f(t)dt \; = \mu \times (b - a)}$$

*où μ est la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$,*

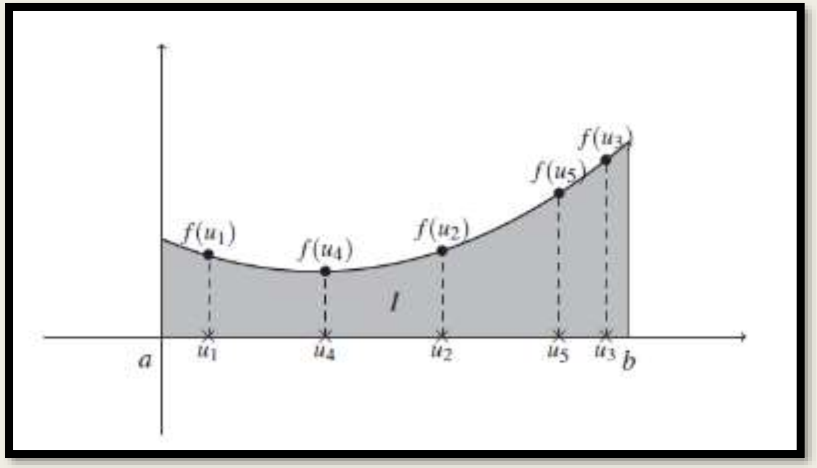
- **Méthode**
  1. *On tire n points $x_1, \dots, x_n$ au hasard dans le segment $[a, b]$,*
  2. *On calcule les valeurs $y_i = f(x_i)$ avec $i =, 1 \dots, n$.*
  3. *On calcule la moyenne m des valeurs obtenues.*

- Si n est grand, la loi des grands nombres assure que

$$m \approx \mu$$

et donc

$$\boldsymbol{I \approx m \times (b - a)}$$

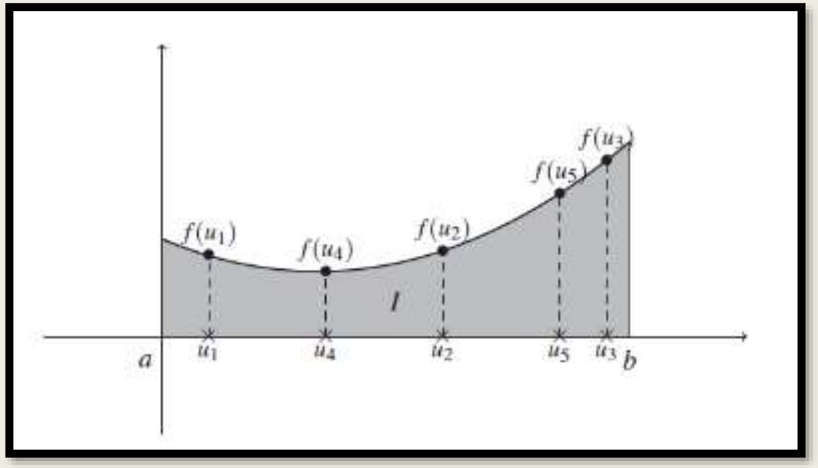


Monte-Carlo classique pour $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

```python
from math import exp
from random import random
```

```python
def MC(n,a,b):
    S = 0
    for i in range(n):
        x = a+(b-a)*random()
        y = exp(-x**2)
        S=S+y
    m = S/n
    I=(b-a)*m
    return I
```

```
In [6]: MC(1000,0,1)
Out[6]: 0.746706763909433

In [7]: MC(100000,0,1)
Out[7]: 0.7468599719404164
```



Comparaison des options

- Type de fonctions intégrées
  - *Géométrie : Affines par morceaux*
  - *Analyse : Avec primitives connues*
  - *Quadratures : Quelconques*
  - *Monte-Carlo : Quelconques*

- Vitesses de convergence
  - *Monte-Carlo :* $1/\sqrt{n}$
  - *Rectangles :* $1/n$
  - *Trapèzes :* $1/n^2$

Conclusion

- Une même question a permis d'aborder :
  - *De la géométrie*
  - *Du calcul de primitives,*
  - *Du calcul des probabilités,*
  - *De l'algorithmique.*

- La notion d'intégrale apparait de manière **transversale**

- De nombreux **approfondissements** sont possibles (technicité variable)

- Des **applications** concrètes doivent être ajoutées en fonction des profils d'élèves.