

Nombres et calculs

Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs.

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes... Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.

Le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté sont à construire en interaction. Ainsi, le calcul mental est mobilisé dans le calcul posé et il peut être utilisé pour fournir un ordre de grandeur avant un calcul instrumenté. Réciproquement, le calcul instrumenté peut permettre de vérifier un résultat obtenu par le calcul mental ou par le calcul posé. Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de faits numériques mémorisés et de modules de calcul élémentaires automatisés. De même, si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes.

Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. Les procédures de traitement de ces problèmes peuvent évoluer en fonction des nombres en jeu et de leur structure. Le calcul contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul et de résolution de problèmes arithmétiques (le travail sur la technique et sur le sens devant se nourrir l'un l'autre).

Attendus de fin de cycle

- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.
- Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.
- Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux	
<p>Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations. <p>Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).</p> <p>Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.</p>	<p>Situations dont la résolution mobilise des connaissances sur la numération ou des conversions d'unités de numération.</p> <p>Illustrer les grands nombres à l'aide d'exemples d'ordres de grandeurs (population française, population mondiale, rayon de la Terre, âge du système solaire...).</p> <p>Le travail sur certaines unités de masse ou de longueur et sur leurs relations (gramme, kilogramme, tonne ; centimètre, mètre, kilomètre, etc.) permet un retour sur les règles de numération.</p>
<p>Comprendre et utiliser la notion de fractions simples.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Écritures fractionnaires. • Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions). <p>Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Une première extension de la relation d'ordre. <p>Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.</p> <p>Établir des égalités entre des fractions simples.</p>	<p>Utiliser des fractions pour :</p> <ul style="list-style-type: none"> - rendre compte de partage de grandeurs ou de mesure de grandeurs dans des cas simples ; - exprimer un quotient. <p>Situation permettant de relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et $1/2$ de, $1/3$ de, $1/4$ de, etc. (fractions vues comme opérateurs).</p> <p>Par exemple, en utilisant une demi-droite graduée, les élèves établissent que $5/10 = 1/2$, que $10/100 = 1/10$, etc.</p> <p>Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</p>

<p>Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Spécificités des nombres décimaux. <p>Associer diverses désignations d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule et décompositions).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Règles et fonctionnement des systèmes de numération dans le champ des nombres décimaux, relations entre unités de numération (point de vue décimal), valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal (point de vue positionnel). <p>Repérer et placer des décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.</p> <p>Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres décimaux.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ordre sur les nombres décimaux. 	<p>Situations nécessitant :</p> <ul style="list-style-type: none"> - d'utiliser des nombres décimaux pour rendre compte de partage de grandeurs ou de mesure de grandeurs dans des cas simples ; - d'utiliser différentes représentations : mesures de longueurs et aires, une unité étant choisie ; - de faire le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (dixième/dm/dg/dL, centième/cm/cg/cL/centimes d'euros, etc.). <p>La demi-droite numérique graduée est l'occasion de mettre en évidence des agrandissements successifs de la graduation du 1/10 au 1/1000.</p>
---	---

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

<p>Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul.</p> <p>Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.</p> <p>Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Addition, soustraction, multiplication, division. • Propriétés des opérations : • $2+9 = 9+2$ • $3 \times 5 \times 2 = 3 \times 10$ • $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$ • Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs. • Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. • Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10). 	<p>Exemples de faits et procédures numériques :</p> <ul style="list-style-type: none"> - multiplier ou diviser par 10, par 100, par 1000 un nombre décimal, - rechercher le complément à l'unité, à la dizaine, à la centaine supérieure, - encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs, - trouver un quotient, un reste, - multiplier par 5, par 25, par 50, par 100, par 0,1, par 0,5 ... <p>Utiliser différentes présentations pour communiquer les calculs (formulations orales, calcul posé, en ligne, en colonne, etc.).</p> <p>En lien avec la calculatrice, introduire et travailler la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ainsi que l'usage des parenthèses.</p>
<p>Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.</p>	
<p>Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Règles d'usage des parenthèses. 	

<p>Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Techniques opératoires de calcul (dans le cas de la division, on se limite à diviser par un entier). 	
<p>Calcul instrumenté : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fonctions de base d'une calculatrice. 	
<p>Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul</p>	
<p>Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sens des opérations. • Problèmes relevant : <ul style="list-style-type: none"> • des structures additives ; • des structures multiplicatives. 	<p>Enrichir le répertoire des problèmes additifs et multiplicatifs, notamment les problèmes relevant de la division.</p>
<p>Organisation et gestion de données Prélever des données numériques à partir de supports variés. Produire des tableaux, diagrammes et graphiques organisant des données numériques. Exploiter et communiquer des résultats de mesures.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Représentations usuelles : <ul style="list-style-type: none"> • tableaux (en deux ou plusieurs colonnes, à double entrée) ; • diagrammes en bâtons, circulaires ou semi-circulaires ; • graphiques cartésiens. 	<p>Extraire ou traiter des données issues d'articles de journaux. Organiser des données issues d'autres enseignements (sciences et technologie, histoire et géographie, éducation physique et sportive...) en vue de les traiter.</p>
<p>Proportionnalité Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.</p>	<p>Situations permettant une rencontre avec des échelles, des vitesses constantes, des taux de pourcentage, en lien avec l'étude des fractions décimales. Mobiliser les propriétés de linéarité (additives et multiplicatives), de proportionnalité, de passage à l'unité. Utiliser des exemples de tableaux de proportionnalité.</p>

Repères de progressivité

Il est possible, lors de la résolution de problèmes, d'aller au-delà des repères de progressivité identifiés pour chaque niveau.

En début du cycle, les nombres sont abordés jusqu'à 1 000 000, puis progressivement jusqu'au milliard. Ce travail devra être entretenu tout au long du cycle 3.

Fractions et décimaux : Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme $\frac{1}{2}$) et des fractions décimales. Du CM1 à la 6^{ème}, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6^{ème}. Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6^{ème}.

Le calcul : La pratique du calcul mental s'étend progressivement des nombres entiers aux nombres décimaux, et les procédures à mobiliser se complexifient.

Les différentes techniques opératoires portent sur des nombres entiers et/ou des nombres décimaux :

- addition et soustraction pour les nombres décimaux dès le CM1 ;
- multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2, de deux nombres décimaux en 6^{ème} ;
- division euclidienne dès le début de cycle, division de deux nombres entiers avec quotient décimal, division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2.

La résolution de problème : La progressivité sur la résolution de problèmes, outre la structure mathématique du problème, repose notamment sur :

- les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux ;
- le nombre d'étapes de calcul et la détermination ou non de ces étapes par les élèves : selon les cas, à tous les niveaux du cycle 3, on passe de problèmes dont la solution engage une démarche à une ou plusieurs étapes indiquées dans l'énoncé à des problèmes, en 6^{ème}, nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche ;
- les supports envisagés pour la prise d'informations : la collecte des informations utiles peut se faire à partir d'un support unique en CM1 (texte ou tableau ou représentation graphique) puis à partir de deux supports complémentaires pour aller vers des tâches complexes mêlant plusieurs supports en 6^{ème}.

La communication de la démarche et des résultats prend différentes formes et s'enrichit au cours du cycle.

Dès le début du cycle, les problèmes proposés relèvent des quatre opérations, l'objectif est d'automatiser la reconnaissance de l'opération en fin de cycle 3.

Repères de progressivité : le cas particulier de la proportionnalité

La proportionnalité doit être traitée dans le cadre de chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie ».

En CM1, le recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples (« si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos coutent 10 euros et 3 stylos coutent 5 euros, alors 9 stylos coutent 15 euros »). Les procédures du type passage par l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant et en fonction des nombres (entiers ou décimaux) choisis dans l'énoncé ou intervenant dans les calculs. A partir du CM2, des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes peuvent être rencontrées. Le sens de l'expression « ...% de » apparaît en milieu de cycle. Il s'agit de savoir l'utiliser dans des cas simples (50 %, 25 %, 75 %, 10 %) o. aucune technique n'est nécessaire, en lien avec les fractions d'une quantité. En fin de cycle, l'application d'un taux de pourcentage est un attendu.