

Inharmonicité des modes d'oscillation des cordes vibrantes

par **Christophe HERNANDEZ** et **Claude LE BRETON**

Université de Rouen - 76821 Mont-Saint-Aignan

Christophe.Hernandez@univ-rouen.fr

Claude.Lebreton@univ-rouen.fr

RÉSUMÉ

Le modèle linéaire des cordes vibrantes exprimé par l'équation de d'Alembert prévoit l'existence d'une suite harmonique de modes propres caractérisés par des fréquences multiples d'une valeur fondamentale. Cependant, l'expérience montre des écarts avec la théorie, dépendant du mode opératoire et des caractéristiques physiques de ces cordes. Après les avoir mesurés, nous en explicitons les causes principales et détaillons les modèles relatifs aux origines de cette inharmonicité. Nous complétons l'étude par une approche prédictive utilisant les logiciels et matériels couramment en usage dans l'enseignement.

INTRODUCTION

L'importance musicale des vibrations des cordes depuis l'Antiquité (Pythagore) est à l'origine d'avancées dans la connaissance des phénomènes fondamentaux qui régissent leur comportement. Des études modernes [2-3] montrent que ce domaine est encore source de nombreuses interrogations et viennent appuyer les contributions majeures élaborées du XVII^e au XIX^e siècle particulièrement celles de MERSENNE, celles de BERNOULLI et de d'ALEMBERT avec leur controverse sur la résolution de l'équation d'onde, ou encore de SAVART qui contribua aux premières études approfondies sur le sujet.

Les mouvements des cordes sont en général très complexes, car avec les oscillations transversales elles-mêmes couplées aux vibrations longitudinales, coexistent des vibrations de torsion [9], auxquelles viennent s'ajouter les effets des interactions avec les supports aux points d'attache et avec l'air. On sait que la justesse des instruments à cordes dépend non seulement de la qualité de fabrication de celles-ci [8], mais aussi de contraintes liées à la nature des matériaux tels que raideur et élasticité. En fait, l'usage courant des cordes se limite en général à des oscillations de faibles amplitudes, masquant souvent l'inharmonicité résultant des phénomènes de non-linéarité. Ainsi, l'étude en classe terminale de la quantification des modes de vibrations transversales d'une corde tendue entre deux points fixes, expose à des résultats insatisfaisants en l'absence de précautions expérimentales. De même nos étudiants sont-ils surpris par les effets de non-linéarité lors d'os-

cillations forcées (non étudiées ici), tels que les mouvements tubulaires issus de couplages dans des plans perpendiculaires et prenant naissance au-delà d'une amplitude critique [14], de tels effets pouvant aussi s'observer pour de très faibles tensions en oscillations libres.

Le modèle élémentaire utilisé pour calculer les fréquences modales, fondé sur l'équation de d'Alembert permet une approche souvent suffisante. Nous envisageons cependant d'en rappeler les limites, puis nous proposons une résolution numérique permettant d'explicitier les conséquences sur l'harmonicité d'une raideur des cordes à faible ou plus grande amplitude, en nous limitant au problème de la corde pincée isolée oscillant dans un plan.

1. LE MODÈLE LINÉAIRE DANS L'APPROXIMATION DE D'ALEMBERT

1.1. L'équation des cordes vibrantes

1.1.1. Simplifications effectuées

Un ensemble de conditions sont nécessaires pour obtenir l'équation aux dérivées partielles la plus simple compatible avec une description acceptable des mouvements. Les cordes sont supposées tendues au repos et rectilignes, et les mouvements sont sans amortissement, de sorte que seules sont considérées les forces de tension. De même, les dimensions latérales des cordes sont négligées devant leur longueur, autorisant la seule prise en compte des forces tangentielles (§ 2.2.). L'angle d'inclinaison d'une corde en tout point est assez peu élevé pour que l'on puisse admettre des approximations justifiées, et le module d'Young suffisamment faible pour que les variations de tension soient négligées (§ A.3.). Les vibrations enfin sont planes.

1.1.2. L'équation des cordes vibrantes et ses solutions (§ A.1. et A.2.)

L'élongation $y(x, t)$ d'un point de la corde est donnée par l'équation d'onde (§ A.2.) traduisant le couplage entre les variables de temps et d'espace :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

où $c_i = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ est la célérité des ondes transversales créées sur la corde de masse linéique μ soumise à une tension de module T_0 .

On montre [4] que la solution générale est de la forme $y(x, t) = f(x - c_i t) + g(x + c_i t)$, superposition de deux ondes planes se propageant sans déformation, expression de ce milieu non dispersif. Dans le cas particulier d'une corde pincée, de longueur l , fixée à

ses extrémités, les solutions s'écrivent :

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin\left(p\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(p\pi \frac{c_l t}{l}\right) \quad p \text{ entier}$$

Elles traduisent la superposition d'une infinité de modes formant une suite harmonique de pulsations (pulsations modales) $\omega_p = p \frac{\pi c_l}{l}$, dont les amplitudes a_p dépendent des conditions initiales. Celles-ci s'écrivent $a_p = \frac{8h}{\pi^2} \frac{1}{p^2} \sin\left(p \frac{\pi}{2}\right)$ si la corde est pincée en son centre avec une amplitude h . C'est dans ces conditions que nous avons réalisé les mesures.

1.2. Observations expérimentales

Le dispositif ci-dessous (cf. figure 1) permet à l'aide du logiciel *Synchronie*, la réalisation d'enregistrements des variations de la pression acoustique (exemple cf. figure 2a). On effectue un filtrage numérique passe-bande autour de la fréquence fondamentale prévue (§ C), à l'aide de la fonction PBANDE de *Synchronie* (cf. figure 2b), qui permet l'accès à cette fréquence soit par analyse de Fourier soit par mesure directe. Les expériences utilisent des cordes de guitare non filées, cylindriques et en acier, de masse volumique $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de module d'Young $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, de longueur $l = 0,712 \text{ m}$. Leurs rayons r sont respectivement de 0,1397 mm ou 0,0055 inch (corde de Mi aigu nommée corde C1) et 0,2032 mm ou 0,008 inch (corde de Si nommée corde C2).



Figure 1 : Dispositif expérimental.

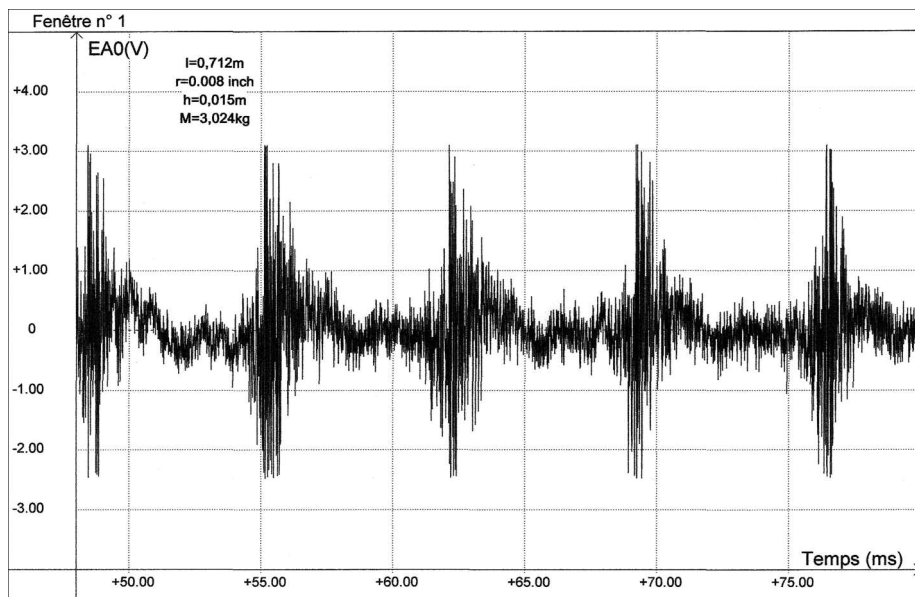


Figure 2a : Type d'enregistrement sonore.

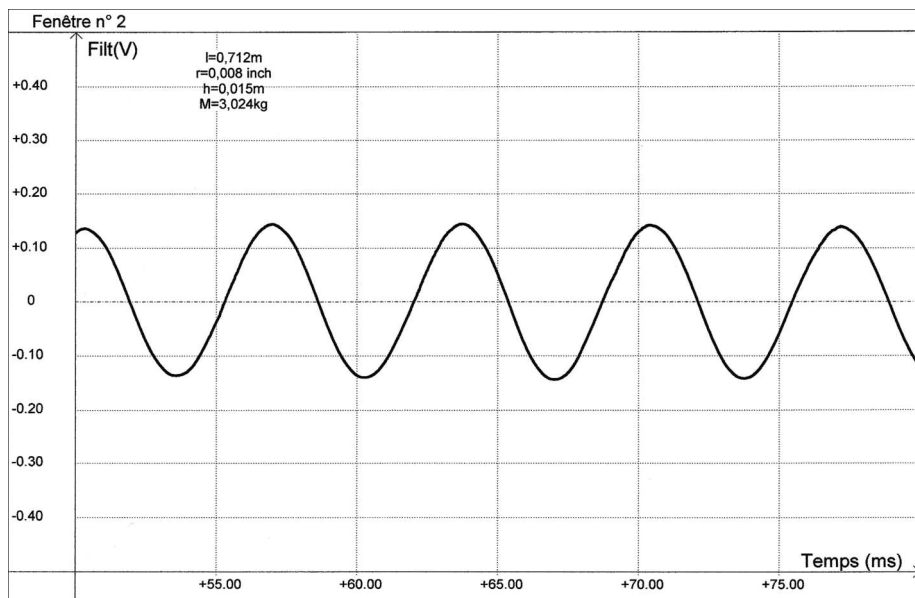


Figure 2b : Signal filtré.

Les fréquences prévues pour ces cordes par le modèle linéaire sont aisément obtenues à partir des pulsations modales et s'écrivent :

$$f_p = \frac{p}{2lr} \sqrt{\frac{T_0}{\pi \rho}} \quad (2)$$

Les résultats ci-dessous (cf. figures 3a et 3b) font apparaître pour le mode fondamental les écarts relatifs $\varepsilon_m = \frac{\delta f_m}{f}$ des fréquences mesurées avec celles du modèle linéaire.

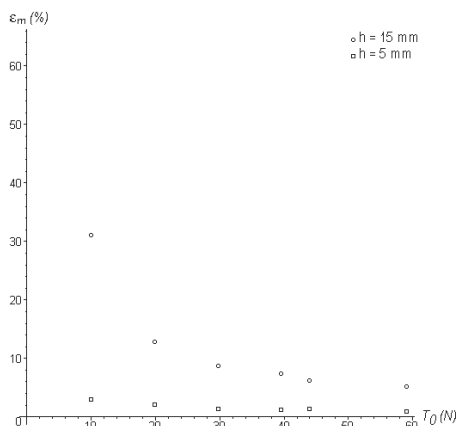


Figure 3a : Corde 1.

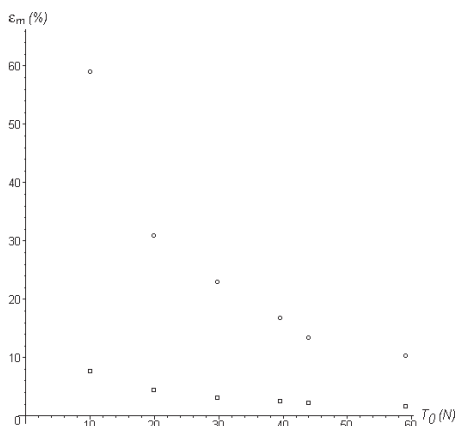


Figure 3b : Corde 2.

Figure 3 : Écarts relatifs en fonction de la tension à l'équilibre pour le mode fondamental.

L'inharmonicité pour de faibles tensions d'équilibre entraîne des écarts très importants avec le modèle de d'Alembert. Elle décroît avec la tension, mais augmente avec le rayon des cordes et avec l'amplitude des oscillations. On constate également que l'inharmonicité croît avec le rang du mode de vibration. En effet les mesures faites sur C2 (en divisant sa longueur par deux puis par trois) avec une amplitude initiale modérée de 5 mm, conduisent sous une tension de 20 N à $(\varepsilon_m)_1 \approx 0,04$, $(\varepsilon_m)_2 \approx 0,15$ et $(\varepsilon_m)_3 \approx 0,31$ pour les modes successifs.

Cet ensemble de résultats mène à la conclusion que les simplifications du modèle linéaire de d'Alembert sont inopérantes pour des cordes peu tendues, de faibles longueurs, de rayons élevés ou oscillant à de grandes amplitudes.

2. AMÉLIORATION DU MODÈLE

2.1. Les causes de l'inharmonicité

L'existence d'une raideur des cordes liée à leurs dimensions et au module d'Young

représente la source principale d'inharmonicité dans nos expériences. Il est approprié de distinguer le cas des faibles amplitudes où l'équation d'onde bien que modifiée par la prise en compte de la raideur reste linéaire, de celui des grandes amplitudes où la non-linéarité joue un rôle majeur. Notons que dans ces conditions la propagation a lieu avec dispersion. Nous avons éliminé les autres sources d'inharmonicité, tout d'abord celle relative à l'admittance aux extrémités en veillant à une grande rigidité des supports, puis nous avons négligé les amortissements fluide et viscoélastique, susceptibles aussi de générer des écarts en fréquence (§ B.2.). Enfin, les pertes dues à la thermoélasticité n'apportent une correction notable que dans un domaine de fréquences étroit non atteint dans nos expériences [14].

2.2. Correction de raideur aux faibles amplitudes

On peut montrer que les forces transversales de tension ont pour effet d'augmenter la fréquence des oscillations. En effet leur résultante calculée sur un élément de longueur dx , s'exprimant en $-E\kappa \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$, proportionnelle au module d'Young E et au moment quadratique κ (cf. § B.1.), permet de compléter l'équation (1) aux faibles amplitudes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{E\kappa}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

Pour le mode partiel de rang p , cela conduit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} - c_i^2 (1 + p^2 \xi) \frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

avec
$$\xi = \frac{E\pi^3 r^2}{4T_0} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \ll 1$$

La résolution de (3) donne les écarts relatifs en fréquence :

$$(\varepsilon_r)_p = \left(\frac{\partial f_p}{f_p}\right) = \frac{1}{2} p^2 \xi = \frac{1}{8} p^2 \frac{E\pi^3 r^2}{T_0} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad (4)$$

Remarquons que ceux-ci sont directement liés à la raideur de la corde $\beta = \frac{dT}{dl} = \frac{E\pi r^2}{l}$

(cf. loi de Hooke § B.1.) par $(\varepsilon_r)_p = p^2 \frac{\pi^2}{8} \frac{l}{T_0} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \beta$. C'est donc la comparaison de $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \beta$ à $\frac{T_0}{l}$ qui fixe l'importance de cet effet.

On observe que $\frac{(\varepsilon_r)_p}{(\varepsilon_r)_1} = p^2$, cependant que les mesures précédentes donnent :

$$\frac{(\varepsilon_m)_2}{(\varepsilon_m)_1} = 3,8 \quad \text{et} \quad \frac{(\varepsilon_m)_3}{(\varepsilon_m)_1} = 7,8.$$

De fait, la comparaison des écarts relatifs expérimentaux ε_m et ceux ε_r résultant de l'application de la relation (4) indique que ce phénomène n'est pas ici la cause principale d'inharmonicité. Le calcul effectué pour C1 et C2 confirme effectivement des valeurs très faibles du rapport $\frac{(\varepsilon_r)_1}{(\varepsilon_m)_1}$, de l'ordre de 10^{-3} . L'équation (6) (§ 2.3.) nous montrera finalement que cette correction, indépendante des conditions initiales n'est significative qu'à très faible amplitude, lorsque $\left(\frac{r}{h}\right)^2$ n'est pas négligeable devant l'unité.

2.3. Correction due à la surtension (inharmonicité d'amplitude (§ A.3. et § A.4.))

L'élasticité du matériau est cause d'inharmonicité dès que l'amplitude n'est plus négligeable. En effet, toute variation de longueur de la corde due à l'inclinaison de celle-ci, entraîne une surtension qui accroît les forces de rappel vers l'équilibre et augmente la fréquence des oscillations.

Un calcul simple peut être conduit où la fréquence modifiée correspond à celle calculée avec la longueur de la corde à sa plus grande elongation [8]. Il donne l'écart relatif en fréquence suivant :

$$\frac{\delta f}{f} \approx \pi \frac{Er^2}{T_0} \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

Les valeurs calculées pour C1 aux tensions élevées sont proches des valeurs expérimentales : respectivement 0,10 et 0,06 à 59N pour $h = 15$ mm, mais aux tensions plus faibles les résultats sont surestimés : 0,57 au lieu de 0,31 pour 10N.

Si l'on veut affiner la prévision, il faut tenir compte de l'équation d'onde.

Le calcul (§ A.3. et § A.4.) révèle que celle-ci, hors correction vue au paragraphe précédent, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_t^2 \left[1 + \frac{E\pi r^2}{2lT_0} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

Cette équation aux dérivées partielles non-linéaire est d'ordre deux pour les coordonnées spatiale et temporelle et n'est pas résoluble simplement.

Cependant, on peut chercher des solutions de la forme $y_p(x, t) = a_p(t) \sin(k_p x)$ (§ A.4.) qui conduisent à (13). Une approche algébrique consiste à considérer l'approximation $a_p(t) = a_{p0} \cos \omega_p t$. Après résolution, on enregistre une amélioration notable de l'écart relatif,

en particulier lorsque la non-linéarité est faible [4-14], mais les résultats sont moins satisfaisants pour de grandes amplitudes.

Nous avons mis en œuvre une solution consistant à résoudre numériquement l'équation différentielle (13) elle-même complétée par la prise en compte des effets de raideur exprimés dans (3) :

$$\frac{d^2 a_p}{dt^2} + \omega_p^2 \left[1 + p^2 \frac{\pi^3}{4} \frac{Er^2}{T_0} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{a_p}{r} \right)^2 \right] \right] a_p = 0 \quad (6)$$

Un programme sur *Maple* donne alors accès à la fréquence fondamentale des oscillations (§ C.) pour toute valeur de tension, dans le cas d'une corde pincée.

3. VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Ci-dessous sont reproduits pour les deux cordes les points expérimentaux et ceux obtenus à partir du modèle amélioré, traité numériquement.

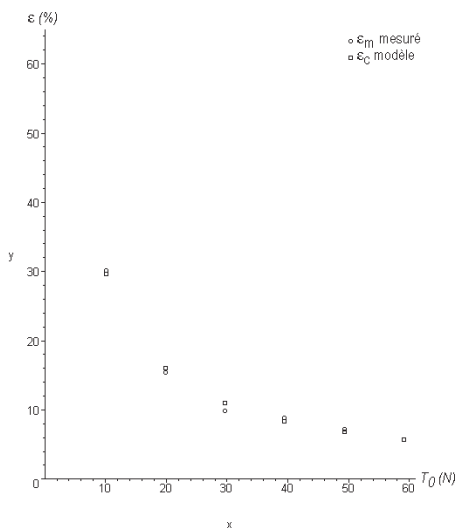


Figure 4a : C1 h = 15 mm.

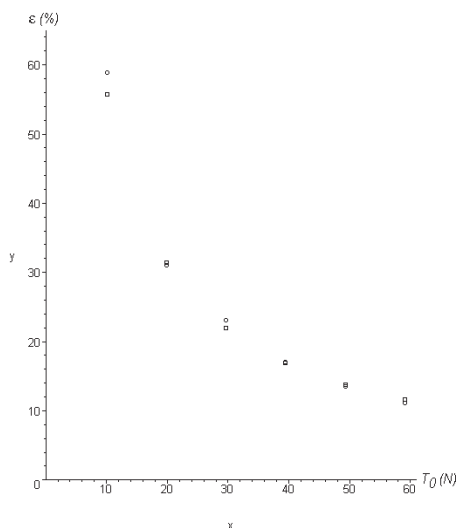


Figure 4b : C2 h = 15 mm.

Figure 4 : Comparaison des courbes expérimentales et du modèle numérique.

Ces résultats sont d'une bonne reproductibilité, bien que réalisés avec du matériel et des logiciels non spécialisés. En dépit d'une approche théorique néanmoins simplifiée, ils sont en accord satisfaisant avec les prévisions du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANAND G.V. « Large-amplitude damped free vibration of stretched string ». *J. Acoust. Soc. Am.*, 1969, n° 45, p. 1089-1096.
- [2] DAVID B. « Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée ». Thèse de doctorat : Université Paris VI, 1999.
- [3] DERVEAUX G. « Modélisation numérique de la guitare acoustique ». Thèse de doctorat : École polytechnique, 2002.
- [4] FAROUX J.-P. et RENAULT J. *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*. Paris : Dunod, 1999. Vibrations transversales d'une corde, p. 177-204.
- [5] FLETCHER N.H. et ROSSING T.D. *The Physics of Musical Instruments*. New York : Springer-Verlag, 1998.
- [6] GARING C. *Ondes mécaniques*. Paris : Ellipses, 1995, p. 42-55.
- [7] JANSSON E.V. *Function, construction and quality of the guitar*. Stockholm : Royal Swedich Academy of Music, 1983.
- [8] JOUSSEN A. « De la guitare ». *Bull. Un. Phys.*, décembre 1982, vol. 77, n° 649, p. 311-336.
- [9] LEIPP E. *Acoustique et musique*. Paris : Masson, 1980. Les instruments à cordes, p. 167-214.
- [10] LUMBROSO H. *Ondes mécaniques et sonores*. Paris : Dunod, 1999. Propagation d'onde non dispersive. Cordes vibrantes, p. 95-179.
- [11] MERCIER J. *Acoustique I*. Paris : PUF, 1962. Propagation avec amortissement, p. 69-83.
- [12] SIRVEN J. *Les ondes : du linéaire au non-linéaire*. Paris : Dunod, 2000. Ondes dans les solides homogènes isotropes, p. 99-113.
- [13] SOUTIF M. *Vibrations Propagation Diffusion*. Paris : Dunod, 1970. Élasticité des solides, p. 90-95.
- [14] VALETTE C. et CUESTA C. *Mécanique de la corde vibrante*. Paris : Hermès, 1993.



Christophe HERNANDEZ
 Professeur de physique
 Université de Rouen
 Mont-Saint-Aignan (Seine-Maritime)



Claude LE BRETON
 Professeur de physique
 Université de Rouen
 Mont-Saint-Aignan (Seine-Maritime)

Annexe

A. ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS D'ONDES

A.1. Équations générales couplées d'une corde sans raideur

Un point P_0 situé en x sur la corde à l'équilibre vient à l'instant t en P tel que $\overrightarrow{P_0P} = \vec{s}(x, t)$.

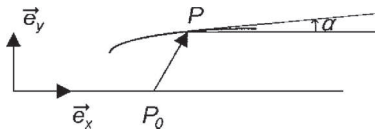


Figure 5

On pose $\vec{s}(x, t) = \eta(x, t)\vec{e}_x + y(x, t)\vec{e}_y$. Un élément dx de la corde, est soumis à ses extrémités aux forces $\vec{F}(x+dx, t)$ et $-\vec{F}(x, t)$ qui se composent des forces tangentielles $\vec{T}$ et des efforts tranchants $\vec{T}_r$ (cf. figure 6). Le théorème du centre d'inertie appliqué à cet élément donne l'équation :

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}$$

où μ est la masse linéique de la corde.

Si l'on admet une raideur suffisamment faible pour négliger les efforts tranchants (§ B.1.), les actions aux extrémités de l'élément dx sont tangentielles. On obtient alors en projection les équations qui expriment le couplage des déformations longitudinale et transversale :

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T \cos \alpha) \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T \sin \alpha) \quad (8)$$

A.2. Équation de d'Alembert (modèle linéaire)

Selon les approximations du § 1.1.1., on écrit :

- ♦ $\vec{T}(x, t) = \vec{T}_0$ (absence de surtension) ;

♦ $\cos \alpha = 1$ et $\sin \alpha = \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (limitation aux angles très faibles).

Il n'y a aucun déplacement longitudinal ($\eta(x, t) = 0$) et l'équation (8) devient l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

A.3. Équations d'ondes à de plus grandes amplitudes

Si l'angle α est plus élevé, on doit prendre en compte les variations de tension.

Le vecteur $\overrightarrow{P_0 Q_0} = dx \vec{e}_x$ associé à l'élément dx de la corde au repos, devient à l'instant t : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{dl} = \vec{s}(x + dx, t) - \vec{s}(x, t) + dx \vec{e}_x = \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) dx \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x} dx \vec{e}_y$.

L'allongement relatif, infiniment petit du premier ordre, a pour expression :

$$\gamma(x, t) = \frac{dl - dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \ll 1$$

Il permet d'exprimer les développements de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ à l'ordre le plus bas en $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \gamma} = (1 - \gamma) \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = (1 - \gamma) \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

La loi de Hooke $\frac{dT}{S} = E\gamma$ qui définit le module d'Young E , donne la tension instantanée en tout point : $T(x, t) = T_0 \left(1 + \gamma(x, t) \frac{ES}{T_0} \right)$ avec $S = \pi r^2$ pour une corde cylindrique.

En négligeant les termes du second ordre en γ , on parvient à :

$$T \sin \alpha = T_0 \left[1 + \left(\frac{ES}{T_0} - 1 \right) \gamma \right] \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{et} \quad T \cos \alpha = T_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{T_0} - 1 \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{ES}{T_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

On peut remarquer que $\frac{ES}{T_0} = \left(\frac{c_l}{c_t} \right)^2$ où $c_l = \sqrt{\frac{ES}{\mu}}$ et $c_t = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ sont respectivement les célérités des ondes longitudinale et transversale le long de la corde aux faibles amplitudes.

Les équations (7) et (8) qui régissent les mouvements couplés longitudinaux et

transversaux s'écrivent alors :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = (c_i^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (c_i^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right] \quad (11)$$

A.4. Résolution des équations aux dérivées partielles

L'existence de modes d'oscillation conduit à rechercher des solutions approchées de la forme :

$$y_p(x, t) = a_p(t) \sin(k_p x) \quad \text{avec} \quad k_p = p \frac{\pi}{l} \quad (12)$$

qui satisfont aux conditions aux limites.

Pour les cordes en acier considérées dans les expériences, les valeurs de $\frac{c_i}{c_t}$ sont comprises entre $2 \cdot 10^{-2}$ et $7 \cdot 10^{-2}$. Elles impliquent que la durée τ de propagation des variations longitudinales de la corde est pour les premiers modes très inférieure à la période θ_p des oscillations transversales ($\frac{\tau}{\theta_p} \approx \frac{p}{2} \frac{c_i}{c_t}$ avec $l \approx c_t \tau$ et $\theta_p = \frac{2\pi}{c_t k_p}$). Il en résulte une uniformisation des surtensions en chaque point, entraînant une identité notable de l'allongement relatif γ , qui n'est alors plus dépendant que du temps.

Ce résultat est aisément explicité dans l'approximation $a_p(t) = a_{p0} \cos \omega_p t$ [4-14] (10)

devient en effet : $\frac{\partial^2 \eta_p}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial x^2} = -\frac{1}{4} a_{p0}^2 k_p^3 (c_i^2 - c_t^2) [1 + \cos(2\omega_p t)] \sin(2k_p x)$ qui conduit

à : $\eta_p(x, t) = -\frac{a_{p0}^2 k_p}{16} [1 + \cos(2\omega_p t)] \sin(2k_p x)$ de fréquence double des oscillations trans-

versales (vibrations d'octave). L'allongement relatif : $\gamma_p(t) = \frac{1}{4} k_p^2 a_{p0}^2 \cos^2 \omega_p t$ est bien indépendant de x .

Dans le cas général, les constatations précédentes justifient le découplage de (10) et

$$(11) : \quad \int_0^l \gamma_p dx = \gamma_p l = \eta(l) - \eta(0) + \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_p}{\partial x} \right)^2 dx$$

où $\eta(l) = \eta(0) = 0$, soit $\gamma_p(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y_p}{\partial x} \right)^2 dx$ qui mène à (5).

(12) permet l'approximation $\gamma_p(t) = \frac{1}{4}k_p^2 a_p^2(t)$ pour $a_p(t)$ quelconque. On déduit alors de (5) l'équation différentielle donnant l'évolution temporelle de l'élongation locale :

$$\frac{d^2 a_p}{dt^2} + \omega_p^2 \left[1 + p^2 \frac{\pi^3}{4} \frac{Er^2}{T_0} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \left(\frac{a_p}{r} \right)^2 \right] a_p = 0 \quad (13)$$

B. LES CAUSES D'INHARMONICITÉ

B.1. Inharmonicité de raideur [12-13]

L'élément de longueur dx est soumis lors de la flexion à des moments fléchissant $-C(x,t)$ et $C(x,t)+dC$ respectivement sur ses deux sections S_1 et S_2 (cf. figure 6). Ceux-ci résultent des actions normales modifiant la longueur des fibres par compression ou extension. On peut montrer qu'il existe une ligne neutre passant par les barycentres des sections qui ne subit aucune variation de longueur lors de la flexion.

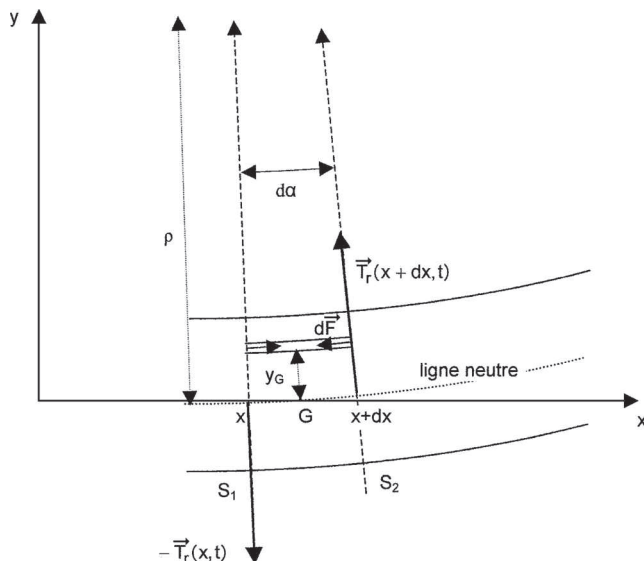


Figure 6

Soit y_G l'ordonnée par rapport à cette ligne d'une portion de section dS située entre S_1 et S_2 . Sa longueur dl vérifiant $d\alpha = \frac{dl}{\rho - y_G} = \frac{dx}{\rho}$ où $\rho(x,t)$ est le rayon de courbure, par suite $\frac{d(dx)}{dx} = -\frac{y_G}{\rho}$ avec $d(dx) = dl - dx$.

La loi de Hooke de manière générale exprime que l'allongement relatif est proportionnel à la force appliquée par unité de surface :

$$\frac{d(dx)}{dx} = \frac{1}{E} \frac{dF_x}{dS} \quad (E \text{ module d'Young}).$$

Le moment $-C(x, t) = \iint_{S_i} y_G dF_x$ par rapport à l'axe Δ_G passant par le barycentre G de l'élément et orthogonal au plan de la figure, permet d'écrire que $C(x, t) = \frac{E\kappa}{\rho(x, t)}$ où

$\kappa = \iint_{S_i} y_G^2 dS$ est le moment quadratique d'expression aisément calculable $\kappa = \frac{1}{4}\pi r^4$ pour une corde cylindrique de rayon r . $y(x)$ étant l'équation de la ligne neutre, on sait que le rayon de courbure est donné par $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ pour de faibles inclinaisons, soit

$C(x, t) = E\kappa \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Le couple des efforts tranchants par rapport à Δ_G a pour résultante $T_r(x, t) dx$. Par application du théorème du moment cinétique à l'élément dx dans son référentiel barycentrique, on obtient $dC + T_r(x, t)dx = dJ_{\Delta_G} \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ où dJ_{Δ_G} est le moment d'inertie de l'élément relativement à Δ_G .

Une évaluation des ordres de grandeur indique cependant que le deuxième membre de l'égalité doit être négligé car $dJ_{\Delta_G} \approx adx$ et $a\ddot{\alpha} / T_r \ll 1$. On est donc autorisé à écrire comme pour un équilibre statique que $dC + T_r(x, t)dx = 0$ et par suite que :

$$T_r(x, t) = -\frac{\partial C}{\partial x} = -E\kappa \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

En conséquence, la résultante des efforts tranchants sur l'élément dx est :

$$df_y = T_r(x + dx, t) - T_r(x, t) = \frac{\partial T_r}{\partial x} dx$$

soit :

$$df_y = -E\kappa \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

B.2. Inharmonicités d'admittance aux extrémités et d'amortissement

Il existe aux extrémités de la corde un couplage avec les supports susceptible de créer en ces points un mouvement périodique transversal. On montre [2-14] que la variation relative de fréquence au voisinage du mode p , positive, décroît avec p et dépend de

l'admittance aux extrémités et de l'impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\mu T_0}$. Dans nos expériences cette correction est négligeable pour des supports très rigides. Par ailleurs, les phénomènes d'amortissement observés résultent de l'action de l'air (amortissement fluide) et d'une relaxation du matériau (amortissement viscoélastique). On montre que les partiels de fréquences élevées s'amortissent plus rapidement et que l'amortissement est essentiellement de type fluide aux basses fréquences considérées ici [3-14].

Les mesures effectuées fournissent un décrément logarithmique de l'ordre de 10^{-2} qui correspond à un écart relatif en fréquence de 10^{-6} , négligeable dans cette étude.

C. PROGRAMME PROPOSÉ SUR MAPLE

```
> inharmonicite:=proc()
global ro,l,r,Ey,h,equa,ci,A,Ap,n,s,k,periode,ecart,pas,N,res,grx,gry;
local M,f,f1,T,om,T1,t1,ti,t0;
grx:=0;gry:=0
ro:=7.85*10^3:l:=0.712:Ey:=210*10^9:r:=0.0002032;
h:=readstat("Amplitude initiale? (m) ");
N:=readstat("Combien de mesures? ");
A:=array(1..N,1..2);

for n from 1 to N do;
M:=readstat("Masse (kg): "); T:=9.81*M;
om:=(Pi/l)*sqrt(T/(ro*Pi*r^2)):T1:=2*Pi/om;
equa:={diff(a(t),t,t)+om^2*(1+(Ey/4)*(Pi/l)^2*(Pi/T)*r^4*(1+(a(t)/r)^2))*a(t)=0};
ci:={D(a)(0)=0,a(0)=(8*h/(Pi^2))};
s:=dsolve(equa union ci,{a(t)},numeric);

pas:=evalf(T1)/500;
Ap:=array(1..3,1..1): t0:=0;
for k from 1 to 3 do;
for ti from 2*pas+t0 to 2*evalf(T1) by pas while((-1)^(k+1)*rhs(s(ti)[2])>0) do
od;
t1:=ti-pas;
for ti from t1 to t1+pas by pas/10 while (rhs(s(ti)[2])>0) do
od;
t1:=ti-pas/10;
for ti from t1 to t1+pas by pas/100 while (rhs(s(ti)[2])>0) do
od;
t1:=ti-pas/100;
for ti from t1 to t1+pas by pas/1000 while (rhs(s(ti)[2])>0) do
od;
Ap[k,1]:=ti;
t0:=Ap[k,1];
```

```

od;
f:=1/(Ap[3,1]-Ap[1,1]);
f1:=1/T1;
ecart:=(f-f1)/f1*100;
printf("tension : %.1f N      fréquence modale : %.1f Hz      fréquence prévue :
%.1f Hz      écart relatif : %.2f pour cent\n",T,f1,f,ecart);
if grx<T then grx:=T;fi;
if gry<evalf(ecart) then gry:=evalf(ecart);fi;
A[n,1]:=evalf(T);A[n,2]:=evalf(ecart);
od;
res:=[A[q,1],A[q,2]] $q=1..N;
plot(res,x=0..1.1*grx,y=0..1.1*gry,style=[point]);
end:
> inharmonicite();

```